Osnove analize

Odvodi

funkcija	*odvod*
c	0
x^n	nx^{n-1}
a^x	$a^x \ln a$
$\frac{a^x}{\ln a}$	a^x
x^x	$x^x(1+\ln x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$
$\mathrm{cth}(x) = \frac{1}{\mathrm{th}(x)}$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$
$\mathrm{arsh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\mathrm{arch}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{arth}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{(1+x)(1-x)}$

Gamma in Beta funkciji

Gamma funkcija:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \quad x \in (0,\infty)$$

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\ \forall x > 0$
2. $\Gamma(n) = (n-1)!\ \forall n \in \mathbb{N}$
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Beta funkcija:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \quad p,q > 0$$

1. $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.\ \forall p,q > 0$
2. $\beta(p,q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du\ (t = \frac{u}{1+u})$
3. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}x \cdot \cos^{2q-1}x\,dx = \frac{1}{2}\beta(p,q) \quad p,q > 0$ $(t = \sin^2 x)$
4. $\beta(1,q) = \frac{1}{q}$
5. $\beta(p+1,q) = \frac{p}{p+q}\beta(p,q)$
6. $\beta(p,q) = \beta(q,p) \quad \beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi$
7. $\beta(p,1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}, \quad \frac{d}{d^{[k]}x}(\beta(p,1-p)) = \frac{u^x \ln^k(x)}{1+u}, \quad p \in (0,1)$
8. $\int_0^1 x^p(1-x)^q\ dx = \beta(p+1,q+1) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}$
9. $\int_0^\infty \frac{x^p}{(1+x)^q}\ dx = \beta(p+1,q-p-1) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q-p-1)}{\Gamma(q)}$
10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\varphi\cos^q\varphi\ d\varphi = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})\Gamma(\frac{q+1}{2})}{2\Gamma(\frac{p+q+2}{2})}$

Nove spremenljivke

Jacobijeva matrika

Naj bo $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x_1,\ldots,x_n) = (f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n))$, Jacobijevo matriko definiramo kot:

$$J_{f(x_1,\ldots,x_n)} = \begin{bmatrix} f_{1_{x_1}} & f_{1_{x_2}} & \cdots & f_{1_{x_n}} \\ f_{2_{x_1}} & f_{2_{x_2}} & \cdots & f_{2_{x_n}} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ f_{m_{x_1}} & f_{m_{x_2}} & \cdots & f_{m_{x_n}} \end{bmatrix}$$

Vpeljava

Naj bosta $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ in $\varphi:\Omega \to \mathbb{R}^2$ preslikava z zvezno odvedljivimi komponentami. Naj bo $detJ_\varphi \neq 0$ na Ω in naj bo $f:\varphi(\Omega) \to \mathbb{R}^2$ zvezna. Potem:

$$\iint_{\varphi(\Omega)} f(x,y)dxdy = \iint_\Omega f(\varphi(t,s)) \cdot |detJ_\varphi(t,s)|dtds$$

Polarne koordinate

$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad |detJ| = r \quad r \geq 0 \quad \varphi \in [0,2\pi]$

Cilindrične koordinate

$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad z = z \quad |detJ| = r \quad r \geq 0 \quad \varphi \in [0,2\pi]$

Sferične koordinate

$x = R\cos\varphi\cos\vartheta \quad y = R\sin\varphi\cos\vartheta \quad z = R\sin\vartheta \quad R \geq 0 \quad \varphi \in [0,2\pi]$

Osnove kombinatorike

Rodovne funkcije

$$\sum_{n=0}^\infty q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{n=0}^b q^n = \frac{1-q^{b+1}}{1-q}$$

$$\sum_{n=a}^\infty q^n = \frac{q^a}{1-q} \qquad \sum_{n=a}^b q^n = \frac{q^a - q^{b+1}}{1-q}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\frac{a_0+\ldots+a_{k-1}x^{k-1}}{1-x^k} = a_0+\ldots+a_{k-1}x^{k-1}+a_0x^k+\ldots+a_{k-1}x^{2k-1}+\ldots$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^\infty \binom{n+k-1}{k}x^k$$

$$B_\lambda(x) = \sum_n \binom{\lambda}{n}x^n = (1+x)^\lambda; \qquad \binom{\lambda}{n} = \frac{\lambda^{\underline{n}}}{n!}$$

Izbori

Imamo n oštevilčenih kroglic. Na koliko načinov lahko izberemo k kroglic?

	s pon.	**brez pon.**
variacije *vrstni red je pomemben*	n^k	$n^{\underline{k}}$
kombinacije *vrstni red ni pomemben*	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Kompozicije

Kompozicija števila $n \in \mathbb{N}$ je $(\lambda_1,\ldots,\lambda_l)$, če $\lambda_i \geq 1$ in $\lambda_1 + \cdots + \lambda_l = n$. Če $\lambda_i \geq 0$, je kompozicija **šibka**. λ_i člen, l dolžina in n velikost kompozicije.
Število kompozicij n je 2^{n-1}, n dolžine k pa $\binom{n-1}{k-1}$ za $n,k \geq 1$.
Število šibkih kompozicij n dolžine k je $\binom{n+k-1}{n}$ za $n,k \geq 1$.

Rekurzivne enačbe

$$c_da_n + c_{d-1}a_{n-1} + \cdots + c_0a_{n-d} = 0 \quad c_i \in \mathbb{C} \quad c_0, c_d \neq 0$$

$$P(x) = c_d\lambda^d + c_{d-1}\lambda^{d-1} + \cdots + c_0$$

$$a_n = \sum_{i=1}^k p_i(n) \cdot \lambda_i^n$$

Kjer $P(x)$ **karakteristični polinom**, $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ njegove ničle in p_i polinom stopnje < kratnost ničle λ_i.

$$c_da_n + c_{d-1}a_{n-1} + \cdots + c_oa_{n-d} = r(n) \cdot \lambda^n$$

$$a_n = a_n^H + q(n) \cdot \lambda^n \cdot n^\alpha$$

Kjer $c_i \in \mathbb{C}$, $c_0, c_d \neq 0$, a_n^H rešitev homogenega dela, $deg(q) \leq deg(r)$ in $\alpha \geq 0$ kratnost λ v $P(x)$.

Kompleksne ničle

$$\lambda = x + i \cdot y = |\lambda|(\cos(\phi) + i\cdot\sin(\phi))$$

$$\overline{\lambda} = x - i \cdot y = |\lambda|(\cos(\phi) - i\cdot\sin(\phi))$$

$$a_n = A \cdot \lambda_n + B \cdot \overline{\lambda}_n = |\lambda|(A'\cos(n\phi) + B'\sin(n\phi))$$

Osnove verjetnosti

idempotentnost	$A \cup A = A = A \cap A$
komutativnost	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
asociativnost	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
distributivnost	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
De Morgan	$(\bigcup_{i\in I} A_i)^{\mathsf{C}} = \bigcap_{i\in I} A_i^{\mathsf{C}}$
	$(\bigcap_{i\in I} A_i)^{\mathsf{C}} = \bigcup_{i\in I} A_i^{\mathsf{C}}$
	$A \cup \Omega = \Omega \quad A \cap \Omega = A$
	$A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
	$A \cup A^{\mathsf{C}} = \Omega \quad A \cap A^{\mathsf{C}} = \emptyset$

Neprazna družina dogodkov $\mathcal{F}$ v Ω je σ-algebra, če velja

- zaprtost za komplemente:
$$A \in \mathcal{F} \implies A^{\mathsf{C}} \in \mathcal{F}$$
- zaprtost za števne unije:
$$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}$$

Če zahtevamo zaprtost le za končne unije, je $\mathcal{F}$ le algebra.

Ker je po De Morganovem zakonu $\left(\bigcup_{i\in I} A_i^{\mathsf{C}}\right)^{\mathsf{C}} = \bigcap_{i\in I} A_i$ imamo zaprtost tudi za preseke.

Ker je $A \setminus B = A \cap B^{\mathsf{C}}$ je algebra zaprta tudi za razlike.

Najmanjša algebra je **trivialna**: $\{\emptyset, \Omega\}$.

Največja algebra je: $\mathcal{P}(\Omega)$.

Najmanjša algebra, ki vsebuje E je $\{\emptyset, E, E^{\mathsf{C}}, \Omega\}$.

Dogodka A in B sta **nezdružljiva** (disjunktna), če je $A \cap B = \emptyset$.

Zaporedje $\{A_i\}_i \in \mathcal{F}$ (končno ali števno mnogo) je **popoln sistem dogodkov**, če

$$\bigcup_i A_i = \Omega \qquad A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall i,j : i \neq j$$

Verjetnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ je preslikava $P:\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ z lastnostmi:

- $P(A) \geq 0$ za $\forall A \in \mathcal{F}$
- $P(\Omega) = 1$
- Za paroma nezdružljive dogodke $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ velja *števna aditivnost*
$$P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$$

Lastnosti P:

- $P(\emptyset) = 0$
- P je končno aditivna.
- P je *monotona*: $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$
- $P(A^{\mathsf{C}}) = 1 - P(A)$
- P je *zvezna*:
$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \implies P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$
$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \implies P(\bigcap_{i=1}^\infty B_i) = \lim_{i\to\infty} P(B_i)$$

$$P(A^{\mathsf{C}}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Če lahko prostor izidov razbijemo na paroma nezdružljive enako verjetne dogodke, jih lahko obravnavamo kot izide: če je dogodek A unija k od n takih dogodkov, je $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{število izidov, ki so v A}}{\text{število vseh izidov}}$

Slepa ali **povsem naključna** izbira pravimo temu, da so vse možnosti enako verjetne.

Točka x je izbrana na slepo ali povsem naključno iz G, če za vsako merljivo podmnožico $A \subseteq G$ velja: $P(x \in A) = \frac{\text{mera množice } A}{\text{mera množice } G}$

Načelo vključitev in izključitev

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|+1} P(\bigcap_{i \in S} A_i)$$

Pogojna verjetnost

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A|B)$ je verjetnostna mera na celem prostoru.

Particije

Dogodke, ki tvorijo **particijo** prostora izidov, lahko obravnavamo kot izide. Z njimi lahko računamo verjetnosti vseh njihovih števnih unij. Če particijo tvori n enako verjetnih dogodkov in je dogodek A unija k dogodkov iz particije, je $P(A) = \frac{k}{n}$.

Izrek o polni verjetnosti

Če $H_1, H_2, H_3, \ldots$ (dogodku H_i pravimo hipoteza) tvorijo **popoln sistem dogodkov** *(tj. vedno se zgodi natanko eden izmed njih)*, velja:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots$$

Dogodkom H_i često pravimo hipoteze in jih je lahko končno ali pa števno neskončno.

(opomba) pri izreku o polni verjetnosti lahko malo popustimo pri predpostavki, da dogodki $H_1, H_2, H_3, \ldots$ tvorijo particijo množice Ω, kar pomeni, da ima presek poljubnih dveh z različnima indeksoma verjetnost nič, njihova unija pa ima verjetnost ena.

Bayesova formula

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$$

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots}$$

Brezpogojnim verjetnostim $P(H_i)$ pravimo **apriorne**, pogojnim verjetnostim $P(H_i|A)$ pa **aposteriorne** verjetnosti hipotez.

Neodvisnost dogodkov

Dogodka A in B sta **neodvisna**, če velja:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Če je $P(B) > 0$, je to ekvivalentno pogoju, da je $P(A|B) = P(A)$. Če je $0 < P(B) < 1$, pa je to ekvivalentno tudi pogoju, da je $P(A|B) = P(A|B^\complement)$.
Dogodki $A_1, A_2, A_3, \ldots$ so neodvisni, če za poljubne različne indekse $i_1, i_2, \ldots, i_k$ velja:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$$

Če so $A_1, A_2, \ldots$ in $B_1, B_2, \ldots$ neodvisni dogodki, tudi za poljuben dogodek $A \in \sigma(A_1, A_2, \ldots)$ velja, da so dogodki $A, B_1, B_2, \ldots$ neodvisni. Pri tem je $\sigma(A_1, A_2, \ldots)$ najmanjša σ-algebra, ki vsebuje dogodke $A_1, A_2, \ldots$.

Slučajne spremenljivke

Slučajna spremenljivka je funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ z lastnostijo, da je $\forall x \in \mathbb{R}$ množica $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \equiv X^{-1}((-\infty, x]) \equiv (X \leq x)$ dogodek.

Diskretne porazdelitve

Diskretne slučajne spremenljivke zavzamejo vrednosti le na števni množici, torej bodisi končni množici bodisi števno neskončni množici.
Za porazdelitev vsake take slučajne spremenljivke velja: $P(X = a_i) = p_i$ in $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$
Diskretna enakomerna porazdelitev na n točkah:

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \mathrm{Unif}\{a_1, \ldots, a_n\}$$

Binomska porazdelitev
$\mathrm{Bin}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$

Naj bo X št. uspelih (z verjetnostjo p) poskusov v zaporedju n poskusov. $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$:

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bernoullijevo zaporedje poskusov je zaporedje neodvisnih slučajnih poskusov, od katerih lahko vsak uspe ali ne uspe, in sicer vsak poskus uspe z isto verjetnostjo.

Bernoullijeva porazdelitev $Ber(p) \sim Bin(1, p)$

Geometrijska porazdelitev
$\mathrm{Geom}(p)$, $p \in (0, 1)$

$(X = k)$ je dogodek, da se A zgodi prvič v k-ti ponovitvi.

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$$

Geometrijska porazdelitev je tudi porazdelitev števila poskusov do vključno prvega uspelega, če izvajamo Bernoullijevo zaporedje poskusov, pri katerih vsak uspe z verjetnostjo p.

Pascalova / negativna binomska porazdelitev
$Pas(m, p) = NB(m, p)$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$

$(X = k)$ je dogodek, da se dogodek A zgodi m-tič v k-ti ponovitvi.

Oziroma X je število poskusov do vključno m-tega uspelega, pri katerih vsak uspe z verjetnostjo p.
$X \sim Pas(m, p)$:

$$p_k = P(X = k) = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m}$$

Hipergeometrijska porazdelitev
Iz posode, v kateri je n kroglic, od tega r rdečih, na slepo in brez vračanja izvlečemo s kroglic. Če z X označimo število rdečih med izvlečenimi, ima ta slučajna spremenljivka hipergeometrijsko porazdelitev: $X \sim \mathrm{Hip}(s, r, n) = \mathrm{Hip}(r, s, n)$. Velja

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{s-k}}{\binom{n}{s}} = \frac{\binom{s}{k}\binom{n-s}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Aproksimacija binomske porazdelitve

Poissonova porazdelitev

$Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{(np)^k e^{-np}}{k!}$$

Če imamo veliko ponovitev ($n \to \infty$) z malo verjetnostjo ($p \to 0$), je $\mathrm{Bin}(n, p) \approx \mathrm{Poi}(np)$

Laplaceova lokalna formula: Če je $p, 1-p \gg \frac{1}{n}$, lahko $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ aproksimiramo

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2\sigma^2}} \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

kjer je σ **standardni odklon** in $np = \lambda$ **pričakovano število uspelih poskusov**.

Meja med smotrnostjo uporabe Poissonovega obrazca in Laplacove lokalne formule je za velike n približno $p = \frac{0{,}6}{\sqrt[3]{n}}$

Laplaceova integralska formula:

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sigma}\right)$$

kjer je $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$, ki je liha

Za majhno relativno napako zahtevamo še:

- $|a - np| \ll \sigma^{4/3}$ ali $|b - np| \ll \sigma^{4/3}$
- $a, b \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ ali $b - a \gg 1$

Kumulativna porazdelitvena funkcija

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke

Realna slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno, če obstaja taka integrabilna funkcija $p_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, da za poljubna $a \leq b$ velja:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p_X(t) dt$$

Funkciji p_X pravimo **porazdelitvena gostota**

Kumulativna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(t) dt$$

ki predstavlja vse možne poltrake $C = (-\infty, x]$. Če je F_X zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, je X porazdeljena zvezno in za vse razen za končno mnogo točk x velja $p_X(x) = F_X'(x)$.

Slučajni vektorji

Slučajni vektor je n-terica slučajnih spremenljivk $X = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$

Porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja

$$F_{(X_1, \ldots, X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$$

Neodvisnost slučajnih spremenljivk

Slučajne spremenljivke so neodvisne, če je

$$F_{(X_1, \ldots, X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \ldots F_{X_n}(x_n)$$

Torej so dogodki $(X_1 \leq x_1), \ldots, (X_n \leq x_n)$ neodvisni.

Naj bo (X, Y) diskretno porazdeljen sluč. vektor:

$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) \quad p_i = P(X = x_i) \quad q_j = P(Y = y_j)$

potem velja:

$$X, Y \text{ neodvisni} \iff p_{ij} = p_i q_j$$

Naj bo (X, Y) zvezno porazdeljen sluč. vektor z gostoto $p_{(X,Y)}(x, y)$, potem velja:

X, Y neodvisni $\iff \exists p_X, p_Y : p_{(X,Y)}(x, y) = p_X(x) p_Y(y)$

Funkcije slučajnih spremenljivk

Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odprti množici in $h : A \to B$ taka bijekcija, da je funkcija $h^{-1} : B \to A$ zvezno odvedljiva. Nadalje naj bo X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto p_X, ki je izven množice A enaka nič. Tedaj je slučajna spremenljivka $Y := h(X)$ porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X\left(h^{-1}(y)\right) \left|(h^{-1})'(y)\right| & y \in B \\ 0 & sicer \end{cases}$$

Naj bo X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto p_X, skoncentrirana na odprti množici A. Naj bo $h : A \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva in $h'(x) \neq 0$ za $\forall x \in A$. Tedaj je slučajna spremenljivka $Y = h(X)$ porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_Y = \sum_{\substack{x \in A \\ h(x) = y}} \frac{p_X(x)}{|h'(x)|}$$

Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^n$ odprti množici; $h : A \to B$ taka bijekcija, da je h^{-1} parcialno zvezno odvedljiva; X sl. vek. porazdeljen zvezno z gostoto p_X. Tedaj je $Y = h(X)$ porazdeljen:

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X(h^{-1}(y)) |\det J(h^{-1}(y))| & y \in B \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$J_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Matematično upanje

Diskretno porazdeljena sl. sprem.
$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad \text{če} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < \infty$$

$$E(h(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} h(x_k) p_k$$

$$E(h(X,Y)) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} h(x_i,y_j) P(X=x_i, Y=y_j)$$

Zvezno porazdeljena sl. sprem. X z gostoto p_X

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)dx \quad \text{če} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x| p_X(x)dx < \infty$$

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) p_X(x)dx$$

$$E(h(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) p_{X,Y}(x,y)dxdy$$

Za neko zvezno funkcijo h.

Lastnosti

Če ima $|X|$ mat. up., ga ima tudi X in velja

$$|E(X)| \leq E(|X|)$$

Če obstaja $E(X^2)$ in $E(Y^2)$, obstaja tudi $E(XY)$ in velja:

$$|E(XY)| \leq E(|XY|) \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$$

Za poljubne sl. sprem $X_1, \dots, X_n$ velja:

$$E(a_1X_1 + \dots a_nX_n) = a_1E(X_1) + \dots + a_nE(X_n)$$

Indikator dogodka

Indikator dogodka A je sl. sprem.:

$$1_A = \begin{cases} 1 & A \text{se zgodi} \\ 0 & A \text{se ne zgodi} \end{cases} \qquad E(1_A) = P(A)$$

Disperzija (varianca)

$$D(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Lastnosti:

- $D(X) \geq 0$
- $D(X) = 0 \iff P(X = E(X)) = 1$
- $D(aX) = a^2 D(X)$

Standardna deviacija/odklon:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

zanjo velja $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$.

Nekoreliranost

Sl. sprem. X in Y sta nekorelirani, če velja:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$X, Y \text{ neodvisni} \implies X, Y \text{ nekorelirani}$$

Če imata X in Y disperzijo, je nekoreliranost ekvivalentna zvezi:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$$

Kovarianca

$$\begin{aligned} K(X,Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

- $K(X,X) = D(X)$
- $K(X,Y) = 0 \iff X, Y$ nekorelirani
- $K(aX + bY, Z) = aK(X,Z) + bK(Y,Z)$
- $K(X,Y) = K(Y,X)$
- $K(aX + b, cY + d) = acK(X,Y)$
- $|K(X,Y)| \leq \sqrt{D(X)D(Y)}$
- $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2K(X,Y)$
- $D(X_1 + \dots + X_n) = D(X_1) + \dots + D(X_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} K(X_i, X_j)$

Standardizacija

$$X_S = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

Korelacijski koeficient

$$r(X,Y) = \frac{K(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = E(X_S Y_S)$$

Lastnosti:

- $r(X,Y) = 0 \iff X, Y$ nekorelirani
- $-1 \leq r(X,Y) \leq 1$
- $r(X,Y) = 1 \iff P(X_S = Y_S) = 1$
- $r(X,Y) = -1 \iff P(X_S = -Y_S) = 1$
- $r(aX + b, cY + d) = r(X,Y)$

Pogojne porazdelitve

Pogojna porazdelitev sl. sprem. X glede na dogodek B:

$$X|B \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ P(X = a_1|B) & P(X = a_2|B) & \dots \end{pmatrix}$$

Pogojna porazdelitvena funkcija

sl. sprem. X glede na dogodek B:

$$F_{X|B}(x) = F_X(x|B) = P(X \leq x|B) = \frac{P((X \leq x) \cap B)}{P(B)}$$

Če je pogojna porazdelitev zvezna, obstaja tudi **pogojna porazdelitvena gostota**:

$$p_{X|B}(x) = F'_{X|B}(x)$$

Pogojna gostota

$$p_X(x|Y = y) \equiv p_X(x|y) = \frac{p_{(X,Y)}(x,y)}{p_Y(y)}$$

Pogojno matematično upanje

$$E(h(X)|B) = \sum_x h(x) P(X = x|B)$$

$$\begin{aligned} E(X|Y = y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \, p_{X|Y}(x|y)dx \\ &= \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} x \, p_{(X,Y)}(x,y)dx \end{aligned}$$

$$E(h(X,Y)|Y = y) = E(h(X,y)|Y = y)$$

$$E(h(X,Y)|Y) = \sum_x h(x,Y) P(X = x|Y)$$

$$E(h(X,Y)|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,Y) p_{X|Y}(x|Y)dx$$

Za vsako slučajno spremenljivko X in dogodek B velja:

$$E(X|B) = \frac{E(XZ)}{P(B)} = \frac{E(XZ)}{E(Z)}$$

kjer je sl. sprem. Z indikator dogodka B.

Za vsako sl. sprem. X z mat. up. in popoln sistem dogodkov $H_1, H_2, \dots$ velja **izrek o polni pričakovani vrednosti**

$$E(X) = P(H_1)E(X|H_1) + P(H_2)E(X|H_2) + \dots$$

Regresijska funkcija

$$\varphi(y) = E(X|Y = y)$$

Za vsako sl. sprem. X z mat. up. in diskretno sl. sprem. Y velja:

$$E(Xg(Y)|Y) = E(X|Y)g(Y)$$

$$E(Xg(Y)) = E(E(X|Y)g(Y))$$

$$E(X) = E(E(X|Y))$$

Za vsak dogodek A in vsako sl. sprem Y velja:

$$E(P(A|Y)) = P(A)$$

Momenti

Moment reda k glede na točko a je

$$m_k(a) = E((X - a)^k) \quad \textit{če obstaja}$$

- **Začetni moment** $z_k := m_k(0) = E(X^k)$
- **Centralni moment** $m_k := m_k(E(X)) = E((X - E(X))^k)$
- **Faktorski moment** reda r: $E(X(X-1)\dots(X-r+1)) = G_X^{(r)}(1)$

$$z_1 = E(X) \qquad m_2 = D(X)$$

Če obstaja $m_n(a)$, obstaja tudi $m_k(a)$ za $\forall k < n$.

Če obstaja z_n, obstaja tudi $m_n(a)$ za $\forall a \in \mathbb{R}$

Centralne momente lahko izračunamo iz začetnih:

$$m_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} z_1^{n-k} z_k$$

Asimetrija

$$A(X) = E(X_S^3) = E\left((\frac{X - E(X)}{\sigma(X)})^3 \right) = \frac{m_3}{m_2^{\frac{3}{2}}}$$

$\forall \lambda > 0 : A(\lambda X) = A(X)$

Sploščenost (kurtozis)

$$K(X) = E\left[\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} \right)^4 \right] = \frac{m_4}{m_2^2}$$

Presežna sploščenost:

$$K^*(X) = K(X) - 3$$

Vrstilne karakteristike

Kvantil reda p

je vsaka vrednost x_p, za katero velja:

$$P(X \leq x_p) \geq p \text{ in } P(X \geq x_p) \geq 1 - p$$

oz. $F(x_p-) \leq p \leq F(x_p)$

- Mediana: $x_{\frac{1}{2}}$
- Kvartili: $x_{\frac{1}{4}}, x_{\frac{2}{4}}, x_{\frac{3}{4}}$
- (Per)centili: $x_{\frac{1}{100}}, \dots, x_{\frac{99}{100}}$

Semi interkvartilni razmik

$$s = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}} \right)$$

Rodovne funkcije

Naj bo X sl. sprem. z zalogo vrednosti $\mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$p_k = P(X = k) \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Rodovna funkcija sl. sprem. X:

$$G_X(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

Obstaja za vse $|s| \leq 1$.

$$P(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

$$G_X(0) = p_0 \quad G_X(1) = 1 \quad G_X(s) = E(s^X)$$

Izrek o enoličnosti:

$$\begin{aligned} &\forall s \in [-1,1] : G_X(s) = G_Y(s) \\ &\iff P(X = k) = P(Y = k) \; \forall k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\lim_{s\uparrow 1} G'_X(s) = \lim_{s\uparrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{s\uparrow 1} k p_k s^{k-1} = E(X)$$

Naj bo X sl. sprem. z rodovno funkcijo G_X, potem je:

$$G_X^{(n)}(1-) = E(X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1))$$

Naj bosta $X_1, \dots, X_n$ neodvisne sl. sprem. z rodovnimi funkcijami $G_{X_1}, \dots G_{X_n}$:

$$G_{X_1 + \dots + X_n}(s) = G_{X_1}(s) \dots G_{X_n}(s) \qquad \forall s \in [-1,1]$$

Naj bodo $\forall n \in \mathbb{N}$ sl. sprem $N, X_1, \dots, X_n$ neodvisne. Naj ima N rodovno funkcijo G_N in X_i rodovno funkcijo G_X ($X_1, \dots, X_n$ so enako porazdeljene). Naj bo $S = X_1 + \cdots + X_n$. Potem je:

$$G_S = G_N(G_X(s)) \qquad \forall s \in [-1, 1]$$

Velja tudi $E(S) = E(N)E(X)$.

$$G_{2X}(s) = G_X(s^2)$$

Znane rodovne funkcije

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{n=0}^{b} q^n = \frac{1-q^{b+1}}{1-q}$$

$$\sum_{n=a}^{\infty} q^n = \frac{q^a}{1-q} \qquad \sum_{n=a}^{b} q^n = \frac{q^a - q^{b+1}}{1-q}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\frac{a_0 + \dots + a_{k-1}x^{k-1}}{1-x^k} = a_0 + \dots + a_{k-1}x^{k-1} + a_0 x^k + \dots + a_{k-1}x^{2k-1} + \dots$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

$$B_\lambda(x) = \sum_n \binom{\lambda}{n} x^n = (1+x)^\lambda; \qquad \binom{\lambda}{n} = \frac{\lambda^n}{n!}$$

Momentno rodovna funkcija

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \qquad \forall t \in R \quad \textit{če obstaja}$$
$$= 1 + z_1 t + \frac{z_2}{2!}t^2 + \frac{z_3}{3!}t^3 + \dots$$

V primeru, ko ima X zalogo vrednosti v $\mathbb{N} \cup \{0\}$, je

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = G_X(e^t)$$

Za zvezno porazdeljeno sl. sprem. X velja:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p_X(x) dx$$

Naj pri nekem $\delta > 0$ $M_X(t)$ obstaja za vse $t \in (-\delta, \delta)$. Potem je porazdelitev za X natanko določana z M_X in vsi začetni momenti obstajajo:

$$z_k = E(X^k) = M_X^{(k)}(0) \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{k!} t^k \qquad \forall t \in (-\delta, \delta)$$

Trditev:

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$$

Če sta X in Y neodvisni, je:

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$$

Izreka o velikih številih

Zaporedje sl. sprem. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **verjetnostno** konvergira proti sl. sprem. X, če

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \leq \varepsilon) = 1$$

Zaporedje sl. sprem. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **skoraj gotovo** (s.g.) konvergira proti sl. sprem. X, če

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$$

Če $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} X$, potem

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{m\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon, \forall n \geq m) = 1$$

Če $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.g.} X$, potem $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{ver.} X$

Naj bo $X_1, X_2, X_n, \dots$ zaporedje sl. sprem. z mat. up. in naj bo $S = X_1 + \cdots + X_n$, $Y_n = \frac{S_n - E(S_n)}{n}$. Potem je $E(Y_n) = 0$.

Za $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja **šibki zakon o velikih številih**, če zap. $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0 verjetnostno, tj.

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{|S_n - E(S_n)|}{n} < \varepsilon\right) = 1$$

Za $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja **krepki zakon o velikih številih**, če zap. $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti 0 skoraj gotovo, tj.

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - E(S_n)}{n} = 0\right) = 1$$

Neenakost Markova

Če je X sl. sprem. z mat. up., potem je

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a} \quad \forall a > 0$$

Neenakost Čebiševa

Če ima X disperzijo, je

$$P(|X - E(X)| \geq a\sigma(X)) \leq \frac{1}{a^2} \quad \forall a > 0$$

oziroma za $\varepsilon := a\sigma(X)$

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Izrek Markova: Če za sl. sprem. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja $\frac{D(S_n)}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, potem velja ŠZVŠ.

Izrek Čibiševa: Če so sl. sprem. $X_1, X_2, \dots$ paroma nekorelirane in je $\sup_{n\in\mathbb{N}} D(X_n) < \infty$, potem velja ŠZVŠ.

Izrek Kolmogorova Naj za neodvisne slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \dots$ velja pogoj

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(X_n)}{n^2} < \infty$$

potem za $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja KZVŠ.

Zgornji pogoj velja, če je $\sup_n D(X_n) < \infty$

Naj bodo $X_1, X_2, \dots$ neodvisne in enako porazdeljene sl. sprem. z disperzijo. Potem velja KZVŠ.

Centralni limitni izrek

Naj bo $X_1, X_2, X_n, \dots$ zaporedje sl. sprem. z mat. up. in naj bo $S = X_1 + \cdots + X_n$, $Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$. Potem je $E(Z_n) = 0$ in $D(Z_n) = 1$.

Za $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja **centralni limitni zakon**, če

$$F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_{N(0,1)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Če so $X_1, X_2, \dots$ neodvisne in enako porazdeljene, velja centralni limitni zakon. *Za velike n je* $S_n \sim N(E(S_n), \sigma(S_n))$

$$E(S_n) = nE(X_1) \quad D(S_n) = nD(X_1)$$

$$P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \leq x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$P(a \leq S_n \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - E(S_n)}{\sigma(S_n)}\right) - \Phi\left(\frac{a - E(S_n)}{\sigma(S_n)}\right)$$

Za neodvisne (neenako porazdeljene) spremenljivke moramo navadno sešteti:

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \quad D(S_n) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i)$$

Če neki sumand X_1 izstopa (prispeva celo več kot polovico variance), ga moramo obravnavati posebej: Npr verjetnost za $S = 10X_1 + \cdots + X_n$ razdelimo na verjetnosti $S' = X_2 + \cdots + X_n$ po možnostih X_1.

Izrek o zveznosti rodovne funkcije

Naj za zaporedje $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sl. sprem. velja

$$M_{Z_n}(t) \to M_{N(0,1)}(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \qquad \forall t \in (-\delta, \delta)$$

potem

$$F_{Z_n}(x) \to F_{N(0,1)}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Funkcija Γ

- $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx, \qquad \forall s > 0$
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(n+1) = n! \qquad n \in \mathbb{N}$
- $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$

Funkcija B

- $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, \qquad \forall p, q > 0$
- $B(p,q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du$
- $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
- $\frac{1}{2}B(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2p-1} (\cos x)^{2q-1}$
- simetričnost: $B(p,q) = B(q,p)$

Seštevanje, konvolucija, razno

Konvolucija (diskretna)

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X=k)\, P(Y=n-k).$$

Konvolucija (zvezna)

$$p_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\, p_Y(z-x)\, dx.$$

Normalne porazdelitve

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1),\ Y \sim N(\mu_2, \sigma_2) \Rightarrow$$
$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$
$$X - Y \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}).$$
$$aX + bY \sim N(a\mu_X + b\mu_Y, \sqrt{a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2}).$$

Poisson

$X \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1),\ Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda_2) \Rightarrow X + Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Binomska

$X \sim \mathrm{Bin}(n_1, p),\ Y \sim \mathrm{Bin}(n_2, p) \Rightarrow X+Y \sim \mathrm{Bin}(n_1+n_2, p)$.

$$X \sim \mathrm{Bin}(n_1, p_1),\ Y \sim \mathrm{Bin}(n_2, p_2) \Rightarrow$$

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i} p_1^i (1-p_1)^{n_1-i} \binom{n_2}{k-i} p_2^{k-i} (1-p_2)^{n_2}$$

Eksponentna in Gamma

$$X, Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \Rightarrow X + Y \sim \Gamma(2, \lambda).$$
$$X \sim \Gamma(k_1, \theta),\ Y \sim \Gamma(k_2, \theta) \Rightarrow X + Y \sim \Gamma(k_1 + k_2, \theta).$$

Laplaceova porazdelitev

Simetrična porazdelitev z ostrim vrhom, uporablja se za modele z večjimi odstopanji kot pri normalni.

$$p_X(x) = \tfrac{1}{2}e^{-|x|} \quad E(X) = 0, \quad \mathrm{Var}(X) = 2$$
$$S_n = X_1 + \cdots + X_n : E(S_n) = 0, \quad \mathrm{Var}(S_n) = 2n$$
$$S_n \approx N(0, \sqrt{2}n)$$

Aproksimacije

Aproksimacija	Pogoji
$e^x \approx 1 + x$	$\|x\| \ll 1$
$e^x \geq 1 + x$	$\forall x$
$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$	$\|x\| \ll 1$
$\ln(1+x) \leq x$	$x > -1$
$\ln(1-x) \approx -x - \frac{x^2}{2}$	$0 < x \ll 1$
$\ln(1-x) \leq -x$	$0 < x < 1$
$(1+x)^n \approx e^{nx}$	$\|x\| \ll 1,\ n$ velik
$(1-\beta)^{1/n} \approx 1 + \frac{\ln(1-\beta)}{n}$	n velik
$1 - (1-\beta)^{1/n} \approx -\frac{\ln(1-\beta)}{n}$	n velik
$(1 - \frac{x}{n})^n \approx e^{-x}$	n velik
$(1 - \frac{x}{n})^n \leq e^{-x}$	$x > 0$

Osnovni pojmi statistike

Na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ imamo sl. sprem X.

Vzorec velikosti n je sl. vektor $(X_1, \ldots, X_n)$, kjer so X_i paroma neodvisni in porazdeljeni kot X.

Vrednost tega sl. vektorja pri enem naboru meritev je $(x_1, \ldots, x_n)$. To so konkretni podatki, ki jih analiziramo.

Ocene za μ (mat. up. sl. sprem X)

- vzorčno povprečje: $\overline{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$
- vzorčni modus: *najpogostejša vrednost*
- vzorčna mediana: srednja vrednost v po velikosti urejenem vzorcu

Ocene za σ (standardna deviacija X)

- vzorčni razmak: $\max(x) - min(x)$
- vzorčna disperzija: $s_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\overline{x} - x_i)^2$
- vzorčna deviacija: $s_0 = \sqrt{s_0^2}$
- popravljena vzorčna disperzija: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (\overline{x} - x_i)^2 = \frac{n}{n-1}s_0^2$
- popravljena vzorčna deviacija: $s = \sqrt{s^2}$

Vzorčne statistike in cenilke

Naj bo $(X_1, \ldots, X_n)$ vzorec velikosti n.

Vzorčna statistika je simetrična funkcija vzorca:

$$\hat{q} = Y = Y_n = g(X_1, \ldots, X_n)$$

Praviloma vzorčna statistika ocenjuje nek parameter q. Tedaj je $\hat{q}$ **cenilka** parametra.

$\hat{q}$ je **nepristranska** cenilka, če $E(\hat{q}) = q$, sicer **pristranskost** merimo kot $B(\hat{q}) = E(\hat{q}) - q$.

Y je **dosledna** cenilka, če $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{ver.} q$ oziroma $\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P(|Y_n - q| < \varepsilon) = 1$.
Standardna napaka vzorčne statistike $\mathrm{SE}(\hat{q})$ je standardna deviacija $\sigma(\hat{q})$.

Srednja kvadratična napaka:
$\mathrm{MSE}(\hat{q}) = E((\hat{q} - q)^2) = D(\hat{q}) + B(\hat{q})^2$.

Naj bo Y_n cenilka za q. Če je $E(Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} q$ in $D(Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ali $\lim_{n\to\infty} \mathrm{MSE}(Y_n) = 0$, potem je Y_n **dosledna** cenilka za q.

Če je $\hat{q}$ nepristranska, je $\mathrm{MSE}(\hat{q}) = \mathrm{var}_a(\hat{q})$, v tem primeru označimo
$\mathrm{SE}(\hat{q}) = \sqrt{\mathrm{var}_a(\hat{q})}$ - standardna napaka

Vzorčna statistika χ^2

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 = \frac{n}{\sigma^2}S_0^2 = \frac{n-1}{\sigma^2}S^2$$

$$\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$$

Studentova porazdelitev

$$p_T(t) = \frac{1}{\sqrt{n}B(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Metode za pridobivanje cenilk

Momentna metoda

Naj bo $(X_1, \ldots, X_n)$ vzorec velikosti n in $k \in \mathbb{N}$.
Vzorčni k-ti moment

$$Z_k = \frac{1}{n}\left(X_1^k + \cdots + X_n^k\right)$$

je *nepristranska dosledna* cenilka za $z_k = E(X^k)$.

Naj bo X zvezno porazdeljena z gostoto $p(x; \xi_1, \ldots, \xi_n)$ in naj obstajajo začetni momenti $z_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x; \xi_1, \ldots, \xi_n)dx$ za $k = 1, \ldots, m$. Denimo, da se iz teh enačb da izraziti parametre $\xi_k = \varphi_k(z_1, \ldots, z_m)$. Potem je $C_k = \varphi(Z_1, \ldots, Z_m)$ cenilka za parameter ξ_k.

Metoda maksimalne zanesljivosti (verjetja)

Naj bo gostota odvisna od parametra a: $p(x|a)$.
Funkcija zanesljivosti:

$$L(a|x_1, \ldots, x_n) = p(x_1|a)\ldots p(x_n|a)$$

Pri danih $x_1, \ldots, x_n$ izberemo a, da je dosežen maksimum funkcije L.

$\ln L = \ln p(x_1|a) + \ln p(x_2|a) + \cdots + \ln p(x_n|a)$
$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = 0$

Ta vrednost je odvisna le od $x_1, \ldots, x_n$, torej $a_{\max} = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Tako dobimo cenilko za a:

$$C = \varphi(X_1, \ldots, X_n)$$

Izpeljava gostote značilke: $p_V(x|a) = F_V'(x|a)$,
$F_V(x|a) = \big(F(x|a)\big)^n$, $p_V(x|a) = n\big(F(x|a)\big)^{n-1}p(x|a)$

Intervalsko ocenjevanje parametrov

Naj bo gostota sl. sprem X odvisna od parametra ξ in naj bo $(x_1, \ldots, x_n)$ vzorec.

Interval $[A, B]$ (*ki je odvisen le od vzorca*) je interval zaupanja za parameter ξ pri **stopnji tveganja** $\alpha \in [0, 1]$, če je verjetnost

$$P(\xi \in [A, B]) = 1 - \alpha \qquad P(\xi \notin [A, B]) = \alpha$$

Številu $\beta = 1 - \alpha$ rečemo **stopnja zaupanja** A in B pa sta vzorčni statistiki.

Waldov interval zaupanja

n neodvisnih poskusov vsak uspe z verjetnostjo p. Opazimo, da uspe S poskusov.

$$\hat{p} = \frac{S}{n} \qquad c = z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$$

Waldov interval zaupanja za p:

$$\hat{p} - c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Ta interval zaupanja ni preveč natančen. Računamo le na toliko mest kot jih ima n in enice ne štejemo za mesto.

Ocenjevanje μ in σ

Opazimo $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma)$

- Zanima nas μ, σ je znan.

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1) \qquad \Delta = \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$c = z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \qquad \overline{X} - \Delta < \mu < \overline{X} + \Delta$$

- Zanima nas μ, σ ni znan. Za σ vzamemo cenilko s.

$$\frac{\overline{X} - \mu}{s}\sqrt{n} \sim \text{Student}(n-1) \qquad \Delta = \frac{cs}{\sqrt{n}}$$

$$c = t_{\alpha/2}(n-1) \qquad \overline{X} - \Delta < \mu < \overline{X} + \Delta$$

- Zanima nas σ, μ ni znan.

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$c_1 = \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \qquad c_2 = \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$$

$$s\sqrt{\frac{n-1}{c_2}} < \sigma < s\sqrt{\frac{n-1}{c_1}}$$

Preizkušanje hipotez

Hipoteza je **enostavna**, če natančno določa porazdelitev, sicer pa je **sestavljena**.

Izberemo **stopnjo značilnosti** α, to je verjetnost, da zavrnemo pravilno hipotezo. **Testi značilnosti** nam povejo ali pri dani α in vzorčni vrednosti zavrnemo hipotezo ali ne.

Test Z

$X \sim N(\mu, \sigma)$, σ poznamo, μ_0 dano število

$$H_0(\mu = \mu_0) : H_1(\mu \neq \mu_0)$$

Testna statistika, ki odloča o zavrnitvi hipoteze:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

Če velja H_0, je $Z \sim N(0, 1)$.

Iz tabele razberemo $z_{\alpha/2} > 0$, da je $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$.

Hipotezo H_0 zavrnemo, če vzorčna vrednost za Z leži na kritičnem območju:

$$K_\alpha = (-\infty, -z_{\alpha/2}] \cup [z_{\alpha/2}, \infty)$$

proti $H_1^{\pm} : \mu \neq \mu_0$, če je $|Z| \geq \Phi^{-1}(\frac{1-\alpha}{2})$

proti $H_1^{+} : \mu > \mu_0$, če je $Z \geq \Phi^{-1}(\frac{1}{2} - \alpha)$

proti $H_1^{-} : \mu < \mu_0$, če je $Z \leq -\Phi^{-1}(\frac{1}{2} - \alpha)$

Neznane verjetnosti v bernoullijevem zaporedju veliko poskusov:
$Z = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{SE}$ $SE = \sqrt{\frac{\mu_0(1-\mu_0)}{n}}$ (meje kritičnega območja podobne kot pri Z testi samo vse Φ^{-1} so z pozitivnim predznakom)

Test T

$X \sim N(\mu, \sigma)$, σ ni znan, μ_0 dano število

$$H_0(\mu = \mu_0) : H_1(\mu \neq \mu_0)$$

Testna statistika, kjer je s popravljena vzorčna disperzija:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n}$$

Če velja H_0, je $T \sim Student(n-1)$.

proti $H_1^{+} : \mu > \mu_0$, če je $T \geq t_\alpha(n-1)$

proti $H_1^{-} : \mu < \mu_0$, če je $T \leq -t_\alpha(n-1)$

proti $H_1^{\pm} : \mu \neq \mu_0$, če je $|T| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$

Vzorci po parih

Imamo neodvisne pare $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ z $(X_i, Y_i) \sim N(\mu_X, \mu_y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho)$. Preverjamo $H_0 : \mu_X = \mu_Y$.

Pare pretvorimo v razlike: $R_i = X_i - Y_i$ in na njih naredimo T test za $\mu_0 = 0$.
$F^{-1}_{\mathrm{Student}(n-1)}(1-\alpha) = t_\alpha(n-1)$

$H_1^X : \mu_X > \mu_Y \qquad K_\alpha = [t_\alpha(n-1), \infty)$

$H_1^Y : \mu_X < \mu_Y \qquad K_\alpha = (-\infty, -t_\alpha(n-1)]$

$H_1^{\pm} : \mu_X \neq \mu_Y \qquad K_\alpha = (-\infty, -t_{\alpha/2}(n-1)] \cup [t_{\alpha/2}(n-1$

P - vrednost

je najmanjša stopnja značilnosti α pri kateri še lahko zavrnemo hipotezo (pri danih vzorčnih podatkih). Določimo tako da α gledamo kot spremenljivko v enem od zgornjih pogojev (mej).

Studentov primerjalni test

Imamo 2 neodvisna vzorca velikosti m in n. Prvi je vzet iz populacije na kateri imamo sl. sprem $X \sim N(\mu_X, \sigma)$, drugi pa je vzet iz populacije na kateri imamo sl. sprem $Y \sim N(\mu_Y, \sigma)$.

Parametrov μ_X, μ_Y, σ ne poznamo.

Naj bosta S_X^2 in S_Y^2 popravljeni vzorčni disperziji za $(X_1, \ldots, X_m)$ in $(Y_1, \ldots, Y_n)$.

Skupna vzorčna varianca je

$$S^2 = \frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}$$

Testiramo hipotezo $H_0(\mu_X = \mu_Y) : H_1(\mu_X \neq \mu_Y)$.

Testna statistika:

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S}\sqrt{\frac{mn}{m+n}}$$

Če H_0 velja, je $T \sim \mathrm{Student}(m+n-2)$.

Test χ^2 (Pearson)

Naj ima sl. sprem X porazdelitveno funkcijo F, ki ni znana.

Preizkušamo domnevo o tipu porazdelitvenega zakona:

$$H_0(F = F_0) : H_1(F \neq F_0)$$

kjer je F_0 dana porazdelitvena funkcija.

Zalogo vrednosti sl. sprem X razdelimo na r razredov: $S_1, \dots, S_r$, da je $p_k = P(X \in S_k | H_0) > 0$ za $\forall k = 1, \dots, r$.

Naj bo $(X_1, \dots, X_n)$ slučajni vzorec za sl. sprem X in N_k število vrednosti vzorca, ki padejo v S_k.

$$N_k \sim \text{Bin}(n, p_k), \qquad k = 1, \dots, r \qquad \tilde{N}_k = np_k$$

Pri velikem n ima statistika

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(\overbrace{N_k}^{\text{opažena f.}} - \overbrace{\tilde{N}_k}^{\text{pričakovana f.}})^2}{\tilde{N}_k}$$

približno porazdelitev $\chi^2(r-1)$

Iz tabele razberemo $c_\alpha > 0$, da je $P(\chi^2 > c_\alpha) = \alpha$. Kritično območje: $K_\alpha = [c_\alpha, \infty)$; $c_\alpha = F^{-1}_{\chi^2(r-1)}(1-\alpha)$.

Preizkus je dovolj natančen, če je $r \geq 3$ in $\tilde{N}_k \geq 5$ za vse i. Če dobimo $\tilde{N}_k < 5$, lahko razrede združimo. Za $r = 2$ pa lahko uporabimo kar dvostranski preizkus uspeha poskusa.

Trditev: Če so v testu χ^2 verjetnosti p_k odvisne od parametra θ, potem ima statistika

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(N_k - np_k(\hat{\theta}))^2}{np_k(\hat{\theta})}$$

porazdelitev približno $\chi^2(r-2)$, kjer je $\hat{\theta}$ cenilka za θ po metodi maksimalne zanesljivosti.

Linearna regresija

Linearni regresijski model:

$$Y = a + bx + U$$

Pri fiksnem x predpostavimo, da $Y = a + bx + U$, kjer sta a, b konstanti in $U \sim N(0, \sigma)$. Z drugimi besedami $Y \sim N(a + bx, \sigma)$. $y = a + bx$ je **regresijska premica**.

Za različne vrednosti $x_1, \dots, x_n$ dobimo slučajni vektor $(Y_1, \dots, Y_n)$, kjer je $Y_k \sim N(a + bx_k, \sigma)$.

Radi bi ocenili vrednost a in b.

Metoda maksimalne zanesljivosti

Iščemo min: $RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \overline{x})(Y_k - \overline{Y})}{\sum_{k=1}^n (x_k - \overline{x})^2} \qquad \hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{x}$$

Vpeljemo vsote:

$$S_{xx} = \sum_{k=1}^n x_k^2 \quad S_{xY} = \sum_{k=1}^n x_k Y_k \quad S_x = \sum_{k=1}^n x_k$$

$$S_Y = \sum_{k=1}^n Y_k$$

Potem je

$$\hat{b} = \frac{nS_{xY} - S_x S_Y}{nS_{xx} - S_x^2} \qquad \hat{a} = \frac{1}{n} S_Y - \hat{b}\frac{1}{n} S_x$$

Intervalsko ocenjevanje koeficientov regresijske premice

$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i$, Residualna standardna napaka $RSS = \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2$, $\hat{SE} = \sqrt{\frac{RSS}{n-2}}$, Ocenjeni standardni napaki koeficientov

$\hat{SE}_{\hat{a}} = \frac{\hat{SE}}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} = \frac{\hat{SE}}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}}$,

$\hat{SE}_{\hat{b}} = \frac{\hat{SE}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$

Intervala zaupanja za a in b pri stopnji tveganja α sta $z = t_{\alpha/2}(n-2)$, $\hat{a} - z\hat{SE}_{\hat{a}} < a < \hat{a} + z\hat{SE}_{\hat{a}}$, $\hat{b} - z\hat{SE}_{\hat{b}} < b < \hat{b} + z\hat{SE}_{\hat{b}}$

Preizkušanje domnev o koeficientih

$H_0 : a = a_0$, $T_a = \frac{\hat{a} - a_0}{\hat{SE}_{\hat{a}}}$, $H_0 : b = b_0$, $T_b = \frac{\hat{b} - b_0}{\hat{SE}_{\hat{b}}}$,

pri stopnji tveganja α domnevo H_0 zavrnemo:
proti $H_1^+ : a > a_0$ oz. $b > b_0$, če je T_a oz. $T_b > t_\alpha(n-2)$;
proti $H_1^- : a < a_0$ oz. $b < b_0$, če je T_a oz. $T_b < -t_\alpha(n-2) = t_{1-\alpha}(n-2)$;
proti $H_1^\pm : a \neq a_0$ oz. $b \neq b_0$, če je $|T_a|$ oz. $|T_b| > t_{\alpha/2}(n-2)$

Napovedovanje

Želimo napovedati Y pri $X = x_0$, tj. $a + bx_0 + \varepsilon$, Točkasta napoved: $\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}x_0$, Standardna napovedna napaka: $SEP = \hat{SE}\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$, Izberemo stopnjo tveganja α, $z = t_{\alpha/2}(n-2)$, Napovedni interval: $\hat{Y} - z \cdot SEP < Y < \hat{Y} + z \cdot SEP$

Testiranje neodvisnosti

Prilagoditveni test

To je poseben primer Pearsonevega testa χ^2

H_0: dogodka A in B sta neodvisna.

$$p = P(A) \qquad q = P(B)$$

kategorije	$A \cap B$	$A \cap B^\complement$	$A^\complement \cap B$	$A^\complement \cap B^\complement$
verjetnost	pq	$p(1-q)$	$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Če sta p in q znana, uporabimo test χ^2 z $r = 4$

$$\chi^2 = \frac{(N_{A\cap B} - npq)^2}{npq} + \frac{(N_{A\cap B^\complement} - np(1-q))^2}{np(1-q)} + \frac{(N_{A^\complement\cap B} - n(1-p)q)^2}{n(1-p)q} + \frac{(N_{A^\complement\cap B^\complement} - n(1-p)(1-q))^2}{n(1-p)(1-q)}$$

ima porazdelitev $\chi^2(3)$

Iz tabele razberemo c_α, da je $P(\chi^2 > c_\alpha) = \alpha$. Kritično območje: $K_\alpha = [c_\alpha, \infty)$

Če pa p in q nista znana, ju ocenimo iz podatkov:

$$\hat{p} = \frac{N_{A\cap B} + N_{A\cap B^\complement}}{n} \qquad \hat{q} = \frac{N_{A\cap B} + N_{A^\complement\cap B}}{n}$$

Testna statistika χ^2 je potem porazdeljena $\chi^2(1)$.

Prilagoditveni test lahko posplošimo na večje *kontingenčne* tabele. Denimo, da prva karakteristika določa r kategorij $(A_1, \dots, A_r)$, druga pa s kategorij $(B_1, \dots, B_s)$.

H_0: A_i in B_j sta neodvisna.

Naj bo $p_i = P(A_i)$ in $q_j = P(B_j)$.

Naj bo X_{ij} opažena frekvenca kategorije A_i in B_j.

Pričakovana frekvenca za X_{ij} je $n\hat{p}_i\hat{q}_j$.

$$\hat{p}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^s X_{ij} \quad \dots \quad \text{cenilka za } p_i$$

$$\hat{q}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^r X_{ij} \quad \dots \quad \text{cenilka za } q_j$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(X_{ij} - n\hat{p}_i\hat{q}_j)^2}{n\hat{p}_i\hat{q}_j}$$

$$\chi^2 \sim \chi^2((r-1)(s-1))$$

Pri dani stopnji zaupanja α iz tabele razberemo c_α, da $P(\chi^2 > c_\alpha) = \alpha$. Kritično območje: $K_\alpha = [c_\alpha, \infty)$

Če je $n\hat{p}\hat{q} < 5$ za kak i, j moramo združiti nekatere razrede.

Neparametrični testi

Test z znaki

analog testa T

Na populaciji imamo sl. sprem. X s porazdelitveno fun. F_X in sl. sprem. Y s porazdelitveno fun. F_Y.

Obravnavamo sl. vektorja $(X_1, \dots, X_n)$ in $(Y_1, \dots, Y_n)$, kjer X_i in Y_i dobimo na istem elementu populacije.

Testiramo hipotezo: $H_0(F_X = F_Y)$

Definirajmo razliko $D_i = X_i - Y_i$ za $i = 1, \dots, n$. Privzamemo, da so vzorčne vrednosti $D_i \neq 0$, sicer jih izpustimo in zmanjšamo n.

Če velja H_0, je $P(D_i > 0) = \frac{1}{2} = P(D_i < 0)$.

Naj bo S^+ število pozitivnih D_i, S^- pa število negativnih. Tedaj je $S^+ \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{2})$, torej je $p_k = P(S^+ = k) = \binom{n}{k} 2^{-n}$.

Pri dani stopnji značilnosti α je kritično območje:

$$K_\alpha = \{k \in \{0, \dots, n\} \ : \ k \leq k_\alpha \text{ ali } k \geq n - k_\alpha\}$$

kjer je k_α določena z zahtevama:

$$P(S^+ \leq k_\alpha) = \sum_{k=0}^{k_\alpha} p_k \leq \frac{\alpha}{2} \quad \text{in}$$

$$P(S^+ \leq k_\alpha + 1) = \sum_{k=0}^{k_\alpha+1} p_k > \frac{\alpha}{2}$$

Za velike n je $S^+ \approx N(\frac{n}{2}, \sqrt{n\frac{1}{2}\frac{1}{2}})$.

Dodatek iz vaj

Ničelna domneva $H_0 : \ P(X > Y) = P(Y > X)$. Alternativna domneva:

- $H_1^X : \ P(X > Y) > P(Y > X)$
  $$p(k, l) = P(S' \geq k) = P(S' \leq l)$$
- $H_1^Y : \ P(Y > X) > P(X > Y)$
  $$p(k, l) = P(S' \geq l) = P(S' \leq k)$$
- $H_1^\pm :$ velja bodisi H_1^X bodisi H_1^Y
  $$p(k, l) = 2\min(P(S' \geq k), P(S' \geq l)) = 2\min(P(S' \leq k), P(S' \leq l))$$

S_X št. meritev kjer je $X > Y$, S_Y št. meritev kjer je $X < Y$, $\hat{n} = S_X + S_Y$, $S' \sim \text{Bin}(\hat{n}, 1/2)$

H_0 zavrnemo če je $p(S_X, S_Y) \leq \alpha$.

Če je $\hat{n} \geq 10$ lahko H_0 zavrnemo:

- proti H_1^X, če $\frac{S_x - S_Y - 1}{\sqrt{\hat{n}}} \geq z_\alpha$
- proti H_1^Y, če $\frac{S_x - S_Y - 1}{\sqrt{\hat{n}}} \leq -z_\alpha$
- proti $H_1^\pm$, če $\frac{|S_x - S_Y| - 1}{\sqrt{\hat{n}}} \geq z_{\alpha/2}$

Inverzijski test

Analog primerjalnega T testa

Naj bosta X in Y sl. sprem s porazdelitvenima funkcijama F_X in F_Y. Vzorca $(X_1, \dots, X_m)$ in $(Y_1, \dots, Y_n)$ sta neodvisna. Predpostavimo, da $m \leq n$. Vzorčne vrednosti $x_1, \dots, x_m$ in $y_1, \dots, y_n$ razvrstimo po velikosti: $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_{m+n}$.

$$R(x) = \text{rang}(x) = \frac{\#\{i; z_i < x\} + \#\{i; z_i \leq x\} + 1}{2}$$

Če je več zaporednih vrednosti enakih, za rang vzamemo povprečno mesto.

$$V = R_1 + \dots + R_m$$

Če velja $H_0(F_X = F_Y)$ in $m + n \geq 20$ in m, n, je V približno normalno porazdeljena:

$$V \sim N\left(\frac{(m+n+1)m}{2}, \sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}\right)$$

$$Z = \sqrt{\frac{3}{mn(m+n+1)}}(2V - m(m+n+1)) \sim N(0, 1)$$

$H_1^X(X$ je stoh. strog. več od $Y(F_X < F_Y)) : K_\alpha = [z_\alpha, \infty)$

$H_1^Y(Y$ je stoh. strog. več od $X(F_X > F_Y)) : K_\alpha = (-\infty, -z$

$H_1^\pm(F_X \neq F_Y) : K_\alpha = (-\infty, -z_{\alpha/2}] \cup [z_{\alpha/2}, \infty)$

Inverzija med X_i in Y_j se pojavi, če ima Y_j manjši rang kot X_i.

Naj bo U št. inverzij v zaporedju $z_1, \dots, z_{n+m}$. Potem je $V = U + \frac{m(m+1)}{2}$, ker vsaka inverzija poveča vsoto rangov za 1.