

▼ cela
ŠTEVILA realna
naravna racionalna kompleksna

VID KAVČIČ

MATEMATIKA NA SPLOŠNI MATURI

VPRAŠANJA IN ODGOVORI ZA USTNI IZPIT IZ MATEMATIKE NA SPLOŠNI MATURI ZA VIŠJO RAVEN

zaporedja in vrste
potence

osnove logike

2022

ENACBE in NEENACBE statistika

KORENI kombinatorika

diferencialni
verjetnostni
RAČUN integralski

FUNKCIJE linearne potenčne
kvadratne eksponentne
racionalne korenske logaritemske polinomske kotne

IZRAZI
stožnice VEKTORJI

GEOMETRIJA v ravnini in prostoru
LIKI IN TELESA

VID KAVČIČ

MATEMATIKA
NA SPLOŠNI MATURI
2022

**Vprašanja in odgovori za
ustni izpit iz matematike
na splošni maturi za
višjo raven**

MATEMATIKA NA SPLOŠNI MATURI

Vprašanja in odgovori za ustni izpit iz matematike na splošni maturi 2022 za višjo raven

Avtor

VID KAVČIČ

Urednik

BOŠTJAN GROŠELJ

Recenzentka

BOJANA DVORŽAK, prof.

Oblikovanje in prelom

VID KAVČIČ

Intelego, d. o. o.

Ljubljana, 2022

51:37

Prva izdaja

500 izvodov



46604

Brez predhodnega pisnega dovoljenja založbe je prepovedano reproduciranje, distribuiranje, dajanje v najem, javna priobčitev, predelava ali druga uporaba tega avtorskega dela ali njegovih delov v kakršnem koli obsegu ali postopku, vključno s fotokopiranjem, tiskanjem, javnim interaktivnim dostopom ali shranitvijo v elektronski obliki.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji

Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51:37.091.27:373.

51(075.3)(079.1)

KAVČIČ, Vid

Matematika na splošni maturi: vprašanja in odgovori za ustni izpit iz matematike na splošni maturi 2022 za višjo raven / Vid Kavčič. - 1. izd. - Ljubljana : Intelego, 2022

ISBN 978-961-6558-69-3

COBISS.SI-ID 108178691

Kazalo

Uvod	6
Merila ocenjevanja	7
1 Izjavni račun	8
2 Izjavni račun	9
3 Množice	10
4 Množice	12
5 Naravna in cela števila	13
6 Liha in soda števila	15
7 Praštevila	16
8 Deljivost	17
9 Večkratniki in delitelji	18
10 Deljenje naravnih števil	19
11 Kriteriji deljivosti	20
12 Ulomki in racionalna števila	21
13 Ulomki in decimalni zapis	22
14 Realna števila	23
15 Absolutna vrednost	24
16 Kompleksna števila	26
17 Množenje kompleksnih števil	28
18 Absolutna vrednost kompleksnega števila	30
19 Konjugirana vrednost kompleksnega števila	32
20 Enačbe	33
21 Potence s celimi eksponenti	34
22 Koreni	36
23 Potence z racionalnimi eksponenti	38
24 Premice	39
25 Koti	40
26 Koti	42
27 Trikotnik	43
28 Znamenite točke trikotnika	44
29 Skladnost likov	45
30 Podobnost likov	46
31 Paralelogram	47
32 Trapez	48
33 Premice in krožnice	49
34 Središčni in obodni kot	50

35	Sinusni in kosinusni izrek	51
36	Ploščine likov	54
37	Ploščine likov	55
38	Krog	56
39	Prizma	57
40	Valj	58
41	Piramida	59
42	Stožec	60
43	Vektorji	62
44	Vektorji	64
45	Vektorji	67
46	Sklarani produkt	68
47	Skalarni produkt v standardni ortonormirani bazi	70
48	Koordinatni sistem v ravnini	72
49	Funkcije	74
50	Lastnosti funkcij	75
51	Lastnosti funkcij	76
52	Linearna funkcija	77
53	Enačba premice	78
54	Premice v ravnini	79
55	Linearne neenačbe	81
56	Potenčna funkcija	82
57	Korenska funkcija	84
58	Kvadratna funkcija	85
59	Teme grafa kvadratne funkcije	86
60	Ničle kvadratne funkcije	87
61	Kvadratna enačba	89
62	Kvadratna neenačba	90
63	EkspONENTNA funkcija	91
64	Logaritemska funkcija	93
65	Računanje z logaritmi	95
66	Polinomi	96
67	Ničle polinomov	98
68	Racionalna funkcija	99
69	Racionalna funkcija	100
70	Funkcija sinus	101
71	Funkcija kosinus	102

72	Funkcija tangens	103
73	Kotne funkcije	104
74	Kotne funkcije v pravokotnem trikotniku	106
75	Kotne funkcije	108
76	Krožne funkcije	109
77	Krožnica	110
78	Elipsa	111
79	Hiperbola	112
80	Parabola	113
81	Zaporedja	114
82	Aritmetično zaporedje	115
83	Geometrijsko zaporedje	116
84	Geometrijska vrsta	118
85	Obrestni račun	119
86	Odvod	120
87	Lokalni ekstremi	121
88	Ekstremi	122
89	Odvod	123
90	Nedoločeni integral	124
91	Nedoločeni integral	125
92	Določeni integral	126
93	Določeni integral	128
94	Kombinatorika	129
95	Permutacije	130
96	Variacije	131
97	Kombinacije	132
98	Binomski izrek	133
99	Verjetnostni račun	135
100	Verjetnostni račun	136
101	Verjetnostni račun	137
102	Statistika	139
103	Statistika	140
104	Statistika	141
105	Statistika	143

Uvod

Pričujoča zbirka temelji na zapiskih, ki sem se jih odločil v duhu priprave na ustni izpit iz matematike digitalizirati. Na pobudo svoje profesorice matematike sem svoje zapiske nato preoblikoval in uredil tako, da so bili primerni za objavo.

Poudarim naj predvsem, da sem pri vprašanjih, pri katerih je treba navesti vsaj eno oziroma dve oziroma tri lastnosti računskih operacij, navedel vse lastnosti, ki se pri tem poglavju obravnavajo v okviru učnega načrta za matematiko v gimnaziji. Prav tako sem pri sledečih vprašanjih, kjer je treba vsaj eno od lastnosti dokazati, večinoma dokazal vse navedene lastnosti. Dijaki in dijakinje naj torej presodijo, katere lastnosti si bodo najlažje zapomnili in jih na ustnem izpitu najbolj suvereno navedli ter dokazali.

Na tem mestu naj se zahvalim svojemu nekdanjemu profesorju Tilnu Šetini, ki me je že nekoliko pred prvim letnikom gimnazije na poseben način navdušil nad lepoto matematične teorije – vse od same strukture pa do jasnosti in čistosti njenega zapisa. Hkrati pa se zahvaljujem tudi profesorici Bojani Dvoržak za napotke in recenzijo, prav tako pa profesorici Urški Markun za pobudo za nastanek te zbirke.

Dodam pa naj, da seveda dopuščam možnost, da so se v knjigo nehote prikradle takšne ali drugačne napake in tiskarski škrti, zato bom zelo vesel prav vsakega popravka oziroma komentarja, ki mi ga lahko sporočite na elektronski naslov vidkavcic@gmail.com.

Kakor koli, v vsakem primeru resnično upam, da bo zbirka (so)maturantom v kar največjo pomoč.

Vid Kavčič

Merila za ocenjevanje

Kandidat lahko pri ustnem izpitu doseže 20 točk, od tega:

- do 18 točk za odgovore na vprašanja in
- do 2 točki za korektno matematično izražanje.

1. Odgovor na vprašanje z izpitnega listka se skladno z veljavnim Predmetnim izpitnim katalogom za splošno maturo – matematika točkuje z od 0 do 6 točkami. V tem delu lahko kandidat prejme skupaj največ 18 točk.

Vsako vprašanje je razčlenjeno na podvprašanja. Največje število točk, ki jih kandidat lahko prejme za povsem pravilen odgovor na posamezno podvprašanje, je zapisano pri vsakem podvprašanju.

Vse točke prejme kandidat, ki pravilno odgovori na posamezno podvprašanje in tudi na morebitna izpraševalčeva dodatna vprašanja, s katerimi preverja razumevanje snovi. Pri ustnem izpitu izpraševalec vsebine vprašanj in podvprašanj ne razširja, lahko pa postavlja dodatna vprašanja, s katerimi preveri kandidatovo razumevanje snovi, na primer: razložite, pojasnite, utemeljite, povejte še drug podoben primer ipd.

2. Poleg odgovorov na vprašanja se oceni tudi kandidatova korektnost matematičnega izražanja. V tem delu lahko prejme največ 2 točki:

2 točki prejme kandidat, ki se korektno matematično izraža, vključno z uporabo ustrezne matematične terminologije in simbolike.

1 točko prejme kandidat, ki se pretežno korektno matematično izraža in le delno uporablja ustrezno matematično terminologijo in simboliko.

0 točk prejme kandidat v ostalih primerih.

1 Izjavni račun

Št. točk

1

Kaj je izjava?

Izjava je vsaka smiselna poved, za katero lahko določimo, ali je pravilna ali nepravilna (ni vprašalna ali vzklična).

Št. točk

1

Kaj je negacija dane izjave? Kdaj je negacija pravilna (resnična) in kdaj nepravilna (neresnična)?

Negacija izjavi A priredi novo izjavo $\neg A$ (beremo *ne A*), pri čemer velja, da je $\neg A$ pravilna, če je A nepravilna, in nepravilna, če je A pravilna.

Negacija izjave je zanikanje dane izjave.

Št. točk

1

Kaj je konjunkcija izjav?

Konjunkcija dveh izjav A in B je vezava izjav z operacijo *in*, kar označimo $A \wedge B$ in preberemo A *in* B . Konjunkcija izjav je pravilna le, če sta obe izjavi pravilni.

Št. točk

3

Kaj je disjunkcija izjav? Dokažite, da je izjava $\neg(A \wedge B)$ enakovredna izjavi $(\neg A) \vee (\neg B)$ za poljubni izjavi A in B .

Disjunkcija dveh izjav A in B je vezava izjav z operacijo *ali*, kar zapišemo $A \vee B$ in preberemo A *ali* B . Disjunkcija dveh izjav je pravilna, če je vsaj ena od obeh izjav pravilna.

Enakovrednosti izjav $\neg(A \wedge B)$ in $(\neg A) \vee (\neg B)$ pravimo De Morganov zakon.

DOKAZ. Izjavi sta enakovredni, če imata enako logično vrednost, kar pomeni, da sta bodisi obe pravilni bodisi obe nepravilni ne glede na logične vrednosti posameznih izjav A in B . De Morganov zakon lahko dokažemo s pravilnostno tabelo.

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
P	P	P	N	N	N	N
P	N	N	P	N	P	P
N	P	N	P	P	N	P
N	N	N	P	P	P	P

Dani izjavi imata ne glede na logične vrednosti poljubnih izjav A in B enako logično vrednost, torej sta enakovredni. \square

2 Izjavni račun

Št. točk

1

Kaj je tautologija?

Tautologija je vsaka sestavljena izjava, ki je pravilna pri vseh kombinacijah logičnih vrednosti posameznih izjav.

Primer tautologije je izjava $A \vee \neg A$.

Št. točk

3

Kaj je implikacija? Dokažite, da je izjava $A \Rightarrow B$ enakovredna izjavi $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ za poljubni izjavi A in B .

Implikacija je vezava dveh izjav A in B z operacijo *iz A sledi B* , kar zapišemo $A \Rightarrow B$. Implikacija ni pravilna le, če iz pravilne izjave sklepamo na nepravilno izjavo.

Dokažimo, da je izjava $A \Rightarrow B$ enakovredna izjavi $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ za poljubni izjavi A in B .

DOKAZ. Izjavi sta enakovredni, če imata enako logično vrednost ne glede na logične vrednosti posameznih izjav A in B . To lahko prikažemo v pravilnostni tabeli.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
P	P	P	N	N	P
P	N	N	P	N	N
N	P	P	N	P	P
N	N	P	P	P	P

Dani izjavi imata ne glede na logične vrednosti poljubnih izjav A in B enako logično vrednost, kar pomeni, da sta enakovredni. \square

Št. točk

2

Kaj je ekvivalenca? Predstavite primer ekvivalence, ki je pravilna.

Ekvivalenca je vezava dveh izjav A in B z operacijo *A natanko tedaj kot B* , kar zapišemo $A \Leftrightarrow B$. Nova izjava pove, da iz A sledi B in tudi iz B sledi A . Ekvivalenca je pravilna, če imata obe izjavi enako logično vrednost. To pomeni, da sta obe pravilni ali obe nepravilni.

Primer pravilne ekvivalence:

A : Trikotnik je pravokoten.

B : V trikotniku velja Pitagorov izrek.

$A \Leftrightarrow B$: Trikotnik je pravokoten natanko tedaj, ko v trikotniku velja Pitagorov izrek.

3 Množice

Št. točk

1

Kaj je prazna množica in kaj je univerzalna množica?

Prazna množica (oznaka: $\{\}$ oziroma \emptyset) je množica, ki nima nobenega elementa.

Univerzalna množica \mathcal{U} je množica elementov, ki nas v danem primeru zanimajo. Vsaka druga obravnavana množica \mathcal{A} v danem primeru je podmnožica univerzalne množice.

Št. točk

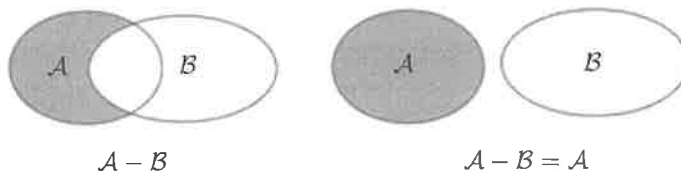
2

Kaj predstavlja razlika dveh množic? Kako označimo razliko dveh množic in kako jo grafično predstavimo?

Razlika množic \mathcal{A} in \mathcal{B} je množica, ki vsebuje vse tiste elemente, ki so elementi \mathcal{A} in hkrati niso elementi \mathcal{B} , kar zapišemo kot

$$\mathcal{A} - \mathcal{B} = \{x \in \mathcal{U}, (x \in \mathcal{A}) \cap (x \notin \mathcal{B})\}.$$

Razliko množic \mathcal{A} in \mathcal{B} označujemo kot $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ oziroma $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$.



Št. točk

1

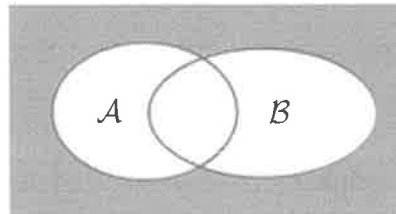
Kaj je komplement množice?

Komplement množice \mathcal{A} je množica \mathcal{A}^c , ki vsebuje natanko vse tiste elemente, ki so v univerzalni množici \mathcal{U} in niso v \mathcal{A} .

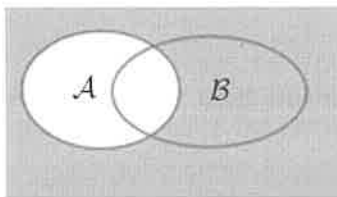
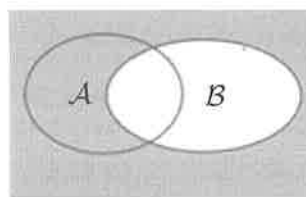
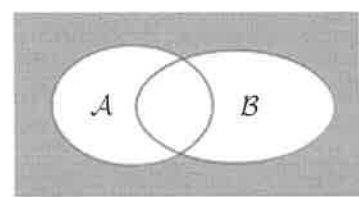
$$\mathcal{A}^c = \{x \in \mathcal{U}, x \notin \mathcal{A}\}$$

Dokažite, da je $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ za poljubni množici A in B .

Predpostavimo, da presek poljubnih množic A in B ni prazna množica. Na spodnji sliki je osenčen komplement njune unije. Pravokotnik ponazarja univerzalno množico \mathcal{U} .

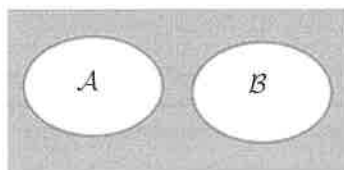
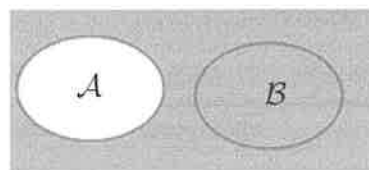
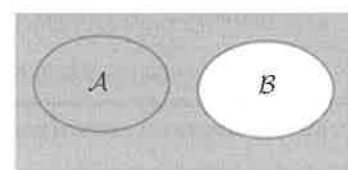
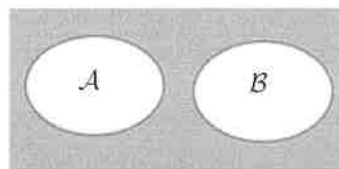

 $(A \cup B)^c$

Na naslednjih slikah pa so zaporedoma osenčeni komplement množice A , komplement množice B in presek komplementov obeh množic.


 A^c

 B^c

 $A^c \cap B^c$

Na prvi in zadnji sliki sta osenčeni enaki množici, torej je $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Preverimo enakost še za disjunktni množici, torej množici, katerih presek je prazna množica. Pokažimo s pomočjo Vennovega diagrama, da tudi v tem primeru enakost velja.


 $(A \cup B)^c$

 A^c

 B^c

 $A^c \cap B^c$

4 Množice

Št. točk

1

Kdaj je množica A podmnožica množice B ?

Množica A je **podmnožica** množice B (oznaka: $A \subseteq B$), če je vsak element množice A tudi element množice B .

Št. točk

1

Kdaj sta dve množici enaki?

Dve množici sta enaki, če imata iste elemente. Za enaki množici velja, da sta druga drugi podmnožici.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

Št. točk

2

Kaj je presek dveh množic? Moč množice A je n , moč množice B pa m . Ocenite, kolikšna je lahko moč množice $A \cap B$.

Presek množic A in B je množica elementov, ki so elementi tako množice A kot tudi množice B .

$$A \cap B = \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Naj bo brez škode za splošnost $n \geq m$. Največja možna moč množice $A \cap B$ je m (množica B je podmnožica A). Najmanjša možna moč množice $A \cap B$ je 0 (množici nimata skupnega elementa).

Št. točk

2

Kaj je unija dveh množic? Moč množice A je n , moč množice B pa m . Ocenite, kolikšna je lahko moč množice $A \cup B$.

Unija množic A in B je množica elementov, ki so elementi množice A ali elementi množice B .

$$A \cup B = \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Naj bo brez škode za splošnost $n \geq m$. Največja možna moč množice $A \cup B$ je $m + n$ (množici nimata skupnega elementa, presek množic je prazna množica). Najmanjša možna moč množice $A \cup B$ je n (množica B je podmnožica A).

5 Naravna in cela števila

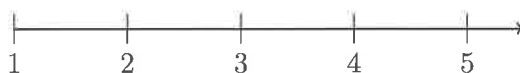
Št. točk

1

Opišite množici \mathbb{N} in \mathbb{Z} in ju predstavite na številski premici.

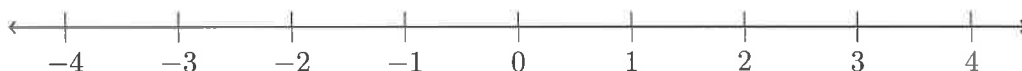
Naravna števila so števila, s katerimi štejemo. Množico naravnih števil \mathbb{N} zapišemo kot

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5 \dots\}.$$



V množici celih števil \mathbb{Z} so naravna števila, število 0 in nasprotne vrednosti naravnih števil.

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots\}.$$



Št. točk

2

Navedite vsaj štiri lastnosti računskih operacij v množicah \mathbb{N} in \mathbb{Z} .

Za poljubna naravna števila a , b in c velja:

$a + b = b + a$	zakon o zamenjavi členov	komutativnost seštevanja,
$a \cdot b = b \cdot a$	zakon o zamenjavi faktorjev	komutativnost množenja,
$(a + b) + c = a + (b + c)$	zakon o združevanju členov	asociativnost seštevanja,
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	zakon o združevanju faktorjev	asociativnost množenja,
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	zakon o razčlenjevanju	distributivnost množenja
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$		glede na seštevanje,
		1 je enota za množenje.

Za seštevanje in množenje celih števil veljajo enake lastnosti kot za seštevanje in množenje naravnih števil. Poleg teh pa velja tudi:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \quad \text{distributivnost množenja glede na odštevanje,}$$
$$a + 0 = 0 + a = a \quad \text{0 je nevtralni element za seštevanje.}$$

Kaj je matematična (popolna) indukcija? Razložite na primeru.

Matematična (ali popolna) **indukcija** je metoda dokazovanja, ki jo lahko uporabimo za dokazovanje trditev, ki veljajo za vsa naravna števila.

Dokazovanje z matematično indukcijo poteka v dveh korakih:

1. **baza indukcije:** trditev dokažemo za $n = 1$,
2. **indukcijski korak:** privzamemo t. i. *indukcijsko predpostavko*, da trditev že velja za neko število $k \in \mathbb{N}$. Od tod dokažemo, da velja tudi za $k + 1$. Potem trditev velja za vsako naravno število n .

Z matematično indukcijo lahko dokažemo formulo za vsoto prvih n naravnih števil:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

DOKAZ.

Baza indukcije: Pri $n = 1$ je leva stran enaka 1, desna pa prav tako, zato trditev pri $n = 1$ drži.

Indukcijski korak: Predpostavimo, da pri nekem naravnem številu k velja:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k + 1)}{2}.$$

Dokažimo, da velja tudi pri $k + 1$.

Dokazujemo torej

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}.$$

To naredimo tako, da levo stran preoblikujemo v desno, pri tem pa uporabimo indukcijsko predpostavko.

$$1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}.$$

Želeno smo dokazali, zato dana trditev velja za vsa naravna števila. \square

6 Liha in soda števila

Št. točk

1

Definirajte soda in liha števila.

Celo število je **sodo**, če ga lahko zapišemo v obliki $2k$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

Celo število je **liho**, če ga lahko zapišemo v obliki $2k - 1$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

Št. točk

1

Pokažite, da je vsota dveh lihih števil sodo število.

Naj bosta $a = 2k - 1$ in $b = 2l - 1$, kjer sta $k, l \in \mathbb{Z}$, poljubni lihi števili. Potem je njuna vsota enaka

$$a + b = 2k - 1 + 2l - 1 = 2k + 2l - 2 = 2 \cdot (k + l - 1).$$

Ker je vsota $a + b$ očitno oblike $2c$ za nek $c \in \mathbb{Z}$, je vsota dveh poljubnih lihih števil sodo število.

Št. točk

2

Pokažite, da je kvadrat lihega števila liho število.

Naj bo $a = 2k - 1$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$, poljubno liho število. Potem je njegov kvadrat enak

$$a^2 = (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 - 2k + 1) - 1.$$

Ker je a^2 očitno oblike $2c - 1$ za nek $c \in \mathbb{Z}$, je kvadrat lihega števila liho število.

Št. točk

2

Pokažite, da je vsota dveh zaporednih lihih števil deljiva s 4.

Naj bosta $a = 2k - 1$ in $b = 2k + 1$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$, zaporedni lihi števili. Potem je njuna vsota enaka

$$a + b = 2k - 1 + 2k + 1 = 4k,$$

kar pomeni, da je vsota dveh zaporednih lihih števil večkratnik števila 4 in s tem deljiva s 4.

7 Praštevila

Št. točk

2

Definirajte praštevilo in sestavljeno število. Naštejte tri praštevila in tri sestavljena števila.

Naravno število je **praštevilo**, če ima natanko dva delitelja; število 1 in število samo.

Primeri praštevil so: 2, 3, 2017 in 2027.

Naravno število je **sestavljeno**, če ima vsaj tri delitelje.

Primeri sestavljenih števil so 4, 6, 1729 in 2022.

Št. točk

2

Kaj je razcep naravnega števila na prafaktorje? Ali je razcep na prafaktorje enoličen?

Vsako naravno število lahko zapišemo kot zmnožek samih praštevil ali potenc praštevil. Rečemo, da število razcepimo na prafaktorje.

Razcep na prafaktorje je enoličen.

Št. točk

2

Dokažite, da je praštevil neskončno mnogo.

DOKAZ. Izrek bomo dokazali s protislovjem. Denimo, da je praštevil končno mnogo, rečimo n . Naj bodo to praštevila $p_1, p_2 \dots p_{n-1}, p_n$, pri čemer naj bo p_n največje praštevilo. Število

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{n-1} \cdot p_n + 1$$

ni deljivo z nobenim izmed praštevil $p_1, p_2 \dots p_{n-1}, p_n$, ker daje pri deljenju z vsakim izmed njih ostanek 1. Ker to pomeni, da število P ni deljivo z nobenim praštevilo, je deljivo le s številom 1 in s samim seboj. To pa pomeni, da je število P praštevilo, očitno pa je, da je $P > p_n$, kar je protislovje, saj smo začetku predpostavili, da je p_n največje praštevilo.

Praštevilo je torej neskončno mnogo. □

8 Deljivost

Št. točk

1

Kdaj je naravno število a večkratnik naravnega števila b ?

Naravno število a je **večkratnik** naravnega števila b , če obstaja tako naravno število k , da velja $a = k \cdot b$.

Št. točk

1

Definirajte relacijo deljivosti v množici \mathbb{N} .

Naj bosta a in b naravni števili. Rečemo, da število b **deli** število a , če obstaja tako naravno število k , da velja $a = b \cdot k$ oziroma, b deli število a , če je a večkratnik števila b .

Št. točk

3

Opišite vsaj tri lastnosti relacije deljivosti.

Značilnosti relacije deljivosti so:

$$a|a, \forall a \in \mathbb{N}$$

refleksivnost: vsako naravno število deli samo sebe,

$$(a|b) \wedge (b|a) \Rightarrow a = b$$

antisimetričnost: če števili delita druga drugo, sta enaki,

$$(a|b) \wedge (b|c) \Rightarrow a|c$$

tranzitivnost: če prvo število deli drugo število in drugo število deli tretje število, potem prvo število deli tretje število.

Št. točk

1

Dokažite, da je relacija deljivosti tranzitivna.

DOKAZ. Naj $a|b$ in $b|c$. Dokažimo, da $a|c$.

Iz zgornjega sledi $b = a \cdot k$ in $c = b \cdot l$ za neki naravni števili k in l . Če združimo enačbi, dobimo $c = (k \cdot l) \cdot a$, od tod pa sledi $a|c$. \square

9 Večkratniki in delitelji

Št. točk

2

Definirajte največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik dveh naravnih števil. Razložite vsaj eno metodo za izračun najmanjšega skupnega večkratnika dveh naravnih števil.

Največji skupni delitelj $D(a, b)$ števil a in b je največje število, ki deli obe števili.

Najmanjši skupni večkratnik $v(a, b)$ števil a in b je najmanjše število, ki je deljivo z obema številoma a in b .

Najmanjši skupni večkratnik števil a in b poiščemo tako, da obe števili razcepimo na prafaktorje. Dobimo ga tako, da zmnožimo vse potence različnih prafaktorjev iz razcepov obeh števil, za eksponent pa vzamemo večjega od eksponentov.

Št. točk

1

Povejte zvezo med m , n , $v(m, n)$ in $D(m, n)$.

Zmnožek najmanjšega skupnega večkratnika in največjega skupnega delitelja dveh naravnih števil je enak zmnožku obeh števil.

$$v(m, n) \cdot D(m, n) = mn$$

Št. točk

1

Kdaj sta si dve naravni števili tuji?

Naravni števili m in n sta si tuji, če velja $D(m, n) = 1$.

Št. točk

2

Na primeru razložite Evklidov algoritem.

Evklidov algoritem je postopek za računanje največjega skupnega delitelja $D(a, b)$ dveh naravnih števil a in b brez razcepa na prafaktorje.

Z Evklidovim algoritmom izračunajmo največji skupni delitelj števil 6300 in 1125.

Večje število delimo z manjšim:	$6300 = 5 \cdot 1125 + 675$
Manjše število delimo z ostankom:	$1125 = 1 \cdot 675 + 450$
Novi delitelj delimo z novim ostankom:	$675 = 1 \cdot 450 + 225$
Ponavljamo postopek, dokler ne pridemo do ostanka 0:	$450 = 2 \cdot 225 + 0$

Zadnji neničelni ostanek v algoritmu je največji skupni delitelj prvotnih števil, zato velja

$$D(6300, 1125) = 225.$$

10 Deljenje naravnih števil

Št. točk

2

Povejte osnovni izrek o deljenju naravnih števil.

Za poljubni naravni števili a in b , $a \geq b$, obstajata enolično določeni števili $k \in \mathbb{N}$ in $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tako da velja $a = k \cdot b + r$, kjer je $0 \leq r < b$.

Pri tem imenujemo število a **deljenec**, b **delitelj**, k **količnik** in r **ostanek** pri deljenju.

Št. točk

2

Koliko je ostanek pri deljenju naravnega števila n z naravnim številom m , če je število n večkratnik števila m ?

Če je n večkratnik števila m , potem je $n = k \cdot m$ oziroma $n = k \cdot m + 0$.

V tem primeru je ostanek enak 0.

Št. točk

2

Naj bo k naravno število. Opišite množico vseh ostankov pri deljenju z naravnim številom k .

Ostankov pri deljenju z naravnim številom k je končno mnogo, in sicer natanko k .

Najmanjši ostanek je 0, največji ostanek pa $k - 1$, saj je ostanek pri deljenju manjši od delitelja.

Množica ostankov pri deljenju z naravnim številom k je $\{0, 1, 2 \dots k - 2, k - 1\}$.

11 Kriteriji deljivosti

Št. točk

4

Za vsako število $k \in \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ navedite kriterij deljivosti s številom k .

Število n je deljivo s številom

- 2, če je zadnja številka števila n deljiva z 2,
- 3, če je vsota števk števila n deljiva s 3,
- 4, če je število, ki ga tvorita zadnji dve števki števila n deljivo s 4,
- 5, če je zadnja številka števila n enaka 0 ali 5,
- 6, če je število n deljivo hkrati z 2 in s 3,
- 8, če je število, ki ga tvorijo zadnje tri števke števila n , deljivo z 8,
- 9, če je vsota števk števila n deljiva z 9,
- 10, če je zadnja številka števila n enaka 0.

Št. točk

2

Izpeljite kriterij deljivosti s številom 2.

Naj bo naravno število $n = \overline{a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1a_0}$. Število lahko razpišemo kot

$$\overline{a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1a_0} = 10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \dots + 10a_1 + a_0.$$

Iz prvih $n - 1$ členov izpostavimo faktor 10:

$$10 \cdot (10^{n-2}a_{n-1} + 10^{n-3}a_{n-2} + \dots + a_1) + a_0.$$

Vsota prvih $n - 1$ členov je večkratnik števila 2 in zato deljiva z 2:

$$2 \cdot 5 \cdot (10^{n-2}a_{n-1} + 10^{n-3}a_{n-2} + \dots + a_1).$$

Ker je vsota vseh členov števila n z izjemo zadnjega člena deljiva z 2, bo število n deljivo z 2 natanko tedaj, ko bo z dva deljivo število a_0 , ki pa je zadnja številka števila n .

12 Ulomki in racionalna števila

Št. točk

2

Kaj je ulomek? Kdaj dva ulomka predstavljata isto racionalno število?

Ulomek je izraz oblike $\frac{a}{b}$, kjer sta a in b celi števili in $b \neq 0$. Število a imenujemo števec, b pa imenovalec, vmes pa je ulomkova črta.

Ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ predstavljata isto racionalno število, če je $a \cdot d = b \cdot c$.

Št. točk

2

Kako je definirana relacija \leq v množici \mathbb{Q} ? Opišite vsaj dve lastnosti te relacije.

Racionalno število $\frac{a}{b}$ je manjše ali enako racionalnemu številu $\frac{c}{d}$ (oznaka: $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$) natanko tedaj, ko je $\frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ nenegativno število:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \geq 0.$$

Lastnosti relacije \leq so:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} \leq \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{e}{f} \quad \text{tranzitivnost,}$$

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b} \quad \text{refleksivnost,}$$

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} \leq \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \quad \text{antisimetričnost.}$$

Št. točk

2

Pokažite, da za poljubni racionalni števili p in q , kjer je $p < q$, obstaja tako racionalno število r , da je $p < r < q$.

DOKAZ. Dokažimo, da je množica racionalnih števil **povsod gosta**.

Naj bosta p in q racionalni števili, za kateri velja $p < q$. Pokažimo, da število $r = \frac{p+q}{2}$ na številski premici leži med številoma p in q , torej da $p < \frac{p+q}{2} < q$.

Ker je $p < q$, je $\frac{p+q}{2} - p = \frac{q-p}{2}$ pozitivno število, kar pomeni, da je $p < \frac{p+q}{2}$. Prav tako je $q - \frac{p+q}{2} = \frac{q-p}{2}$ pozitivno število, kar pomeni, da je $\frac{p+q}{2} < q$.

Iz tega torej sledi $p < \frac{p+q}{2} < q$, kar smo želeli dokazati. \square

13 Ulomki in decimalni zapis

Št. točk

3

Kako iz decimalnega zapisa števila prepoznamo, da lahko to število zapišemo z ulomkom? Kako poljubnemu ulomku priredimo njegov decimalni zapis? Kako iz zapisa ulomka ugotovimo, ali ima končen decimalni zapis?

Če je decimalno število **končno**, ga lahko vedno zapišemo z ulomkom. Decimalno število lahko prav tako zapišemo z ulomkom, če je **neskončno in periodično**.

Poljubnemu ulomku priredimo njegov decimalni zapis tako, da števec delimo z imenovalcem.

Končen decimalni zapis imajo **desetiški ulomki**. To so ulomki, ki jih lahko razširimo tako, da so njihovi imenovalci potence števila 10.

Št. točk

1

Podajte primer ulomka, ki ima končen decimalni zapis, in primer ulomka, ki ima neskončen decimalni zapis.

Primer ulomka s končnim decimalnim zapisom: $\frac{314}{100} = 3,14$.

Primer ulomka z neskončnim decimalnim zapisom: $\frac{22}{7} = 3,\overline{142857}$.

Št. točk

1

Podajte primer periodičnega decimalnega števila s periodo reda (dolžine) vsaj 2 in ga zapišite kot ulomek.

Naj bo $a = 20,\overline{21}$ periodično decimalno število, ki ga zapisati z ulomkom.

Število pomnožimo s tako potenco 10 tako, da decimalno vejico premaknemo za toliko mest v desno, kot je dolžina periode. V našem primeru torej množimo s 100. Velja:

$$100a = 2021,\overline{21}$$

Od tega števila odštejemo število a in dobimo enačbo:

$$99a = 2021,\overline{21} - 20,\overline{21} = 2001,$$

od koder sledi, da je ulomek, ki smo ga iskali, enak $a = \frac{2001}{99} = \frac{667}{33}$.

14 Realna števila

Št. točk

1

Kdaj je realno število racionalno in kdaj iracionalno? Kako se razlikujeta njuna decimalna zapisa?

Realno število je **racionalno**, če ga lahko zapišemo v obliki ulomka oblike $\frac{a}{b}$, kjer sta a in b tuji si celi števili ter b različen od 0.

Realno število je **iracionalno**, če ga ni moč zapisati v obliki ulomka $\frac{a}{b}$.

Racionalno število lahko zapišemo bodisi s **končno decimalno številko** bodisi z **neskončno periodično decimalno številko**.

Iracionalna števila zapišemo z **neskončno decimalno številko, ki ni periodična**.

Št. točk

1

Naštejte vsaj tri primere racionalnih števil in vsaj tri primere iracionalnih števil.

Primeri racionalnih števil: $0, 1, 2, \frac{1}{7}, -\frac{2}{3}, \frac{2021}{2022}$.

Primeri iracionalnih števil: $\pi, e, \phi, \sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{2022}$.

Št. točk

2

Dokažite, da $\sqrt{2}$ ni racionalno število.

DOKAZ. Trditev bomo dokazali s protislovjem.

Denimo, da $\sqrt{2}$ je racionalno število. To pomeni, da ga lahko zapišemo v obliki okrajšanega ulomka: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ za neki tuji naravni števili a in b . Od tod sledi, da je $a^2 = 2b^2$, kar pomeni, da je a sodo število. Vsled tega lahko pišemo $a = 2a_0$ za neko naravno število a_0 . Potem je $b^2 = 2a_0^2$. Od tod sledi, da je tudi b sodo število, zato ga lahko zapišemo kot $b = 2b_0$ za neko naravno število b_0 .

Tako sta tako a kot b sodi števili. To pa nasprotuje naši začetni predpostavki, da je ulomek $\frac{a}{b}$ okrajšan oziroma, da sta si števili a in b tuji.

Od tod sledi, da $\sqrt{2}$ ni racionalno število. □

15 Absolutna vrednost

Št. točk

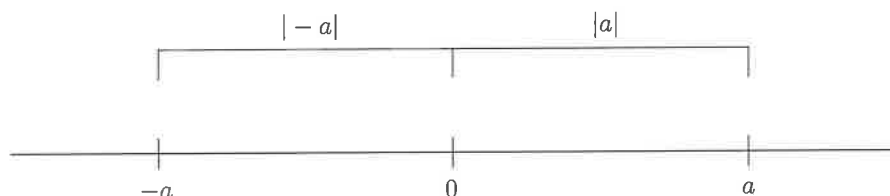
2

Definirajte absolutno vrednost realnega števila in razložite njen geometrijski pomen.

Absolutna vrednost nenegativnega realnega števila a je kar število a , absolutna vrednost negativnega števila a pa je njegova nasprotna vrednost $-a$.

$$|a| = \begin{cases} a; & a \geq 0 \\ -a; & a < 0 \end{cases}$$

Absolutna vrednost predstavlja oddaljenost realnega števila števila od izhodišča (točke 0) na številski premici.



Št. točk

2

Navedite vsaj štiri lastnosti absolutne vrednosti realnega števila.

Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$. Potem velja:

$ a \geq 0$	absolutna vrednost realnega števila je nenegativno število,
$ a = 0 \Leftrightarrow a = 0$	število 0 je edino število, katerega absolutna vrednost je 0,
$ a = -a $	število a in njegova nasprotna vrednost imata enaki absolutni vrednosti,
$ ab = a b $	absolutna vrednost produkta je enaka produktu absolutnih vrednosti števil,
$ a^{-1} = a ^{-1}, a \neq 0$	absolutna vrednost obratne vrednosti je obratna vrednost, absolutne vrednosti od 0 različnega števila,
$\left \frac{a}{b}\right = \frac{ a }{ b }, b \neq 0$	absolutna vrednost količnika je enaka količniku absolutnih vrednosti,
$ a + b \leq a + b $	trikotniška neenakost.

Dokažite, da za poljubni realni števili x in y velja $|x + y| \leq |x| + |y|$.

DOKAZ. Ločimo več primerov:

- a) če je $x \geq 0$ in $y \geq 0$, velja tudi $x + y \geq 0$ in s tem

$$|x + y| = x + y = |x| + |y|,$$

v tem primeru torej velja enakost.

- b) če je $x \geq 0$ in $y < 0$, potem je lahko $x + y > 0$ ali pa $x + y < 0$.

V prvem primeru je

$$|x| + |y| - |x + y| = x - y - (x + y) = -2y,$$

kar je pozitivno število. V drugem primeru pa je

$$|x| + |y| - |x + y| = x - y - (-(x + y)) = 2x,$$

kar je pozitivno število. Neenakost je dokazana.

Dokaz v primeru $y \geq 0$ in $x < 0$ je analogen.

- c) če je $x < 0$ in $y < 0$, velja tudi $x + y < 0$ in s tem

$$|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) = |x| + |y|,$$

v tem primeru torej velja enakost. □

16 Kompleksna števila

Št. točk

1

Definirajte množico kompleksnih števil.

Množica kompleksnih števil je množica vseh števil oblike $a + bi$, pri čemer sta a in b realni števili, i pa tako imenovana **imaginarna enota**, za katero velja $i^2 = -1$. Število a imenujemo **realni del**, število b pa **imaginarni del** kompleksnega števila z . To množico označimo s simbolom \mathbb{C} . Z matematičnimi znaki:

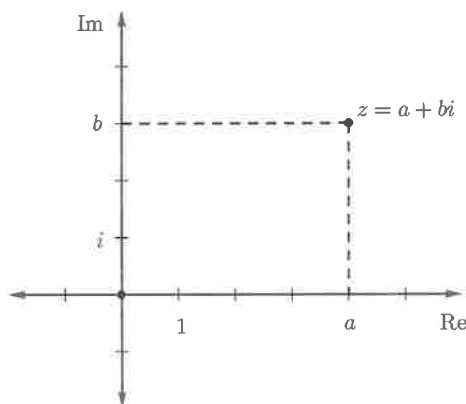
$$\mathbb{C} = \{a + bi; (a, b \in \mathbb{R}) \wedge (i^2 = -1)\}.$$

Št. točk

1

Kako grafično upodobimo (predstavimo) kompleksna števila?

Kompleksna števila upodobimo s točkami v **kompleksni ravnini**, ki jo določata med seboj pravokotni vodoravna realna os z izbrano enoto 1 in navpična imaginarna os z izbrano enoto i .



Št. točk

1

Definirajte seštevanje kompleksnih števil.

Naj bosta $z_1 = a + bi$ in $z_2 = c + di$ kompleksni števili. Potem je vsota kompleksnih števil z_1 in z_2 enaka

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i.$$

Kompleksna števila seštevamo tako, da seštejemo posebej realni in posebej imaginarni komponenti.

Št. točk

2

Navedite eno lastnost seštevanja kompleksnih števil in jo dokažite.

Za seštevanje kompleksnih števil veljata:

- a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ komutativnost seštevanja,
b) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ asociativnost seštevanja.

DOKAZ. Naj bodo $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ in $z_3 = e + fi$ kompleksna števila.

a) Zapišemo

$$z_2 + z_1 = (c + di) + (a + bi) = (c + a) + (d + b)i.$$

Ker je seštevanje realnih števil komutativno, lahko rezultat zapišemo kot

$$z_2 + z_1 = (c + a) + (d + b)i = a + c + (b + d)i = (a + bi) + (c + di) = z_1 + z_2.$$

b) Razvijemo levo stran izraza:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = (a + c) + e + ((b + d) + f)i = a + c + e + (b + d + f)i.$$

Razvijemo še desno stran izraza in ugotovimo, da je enaka levi:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = a + (c + e) + (b + (d + f))i = a + c + e + (b + d + f)i = (z_1 + z_2) + z_3.$$

S tem smo dokazali komutativnost in asociativnost seštevanja kompleksnih števil. \square

Št. točk

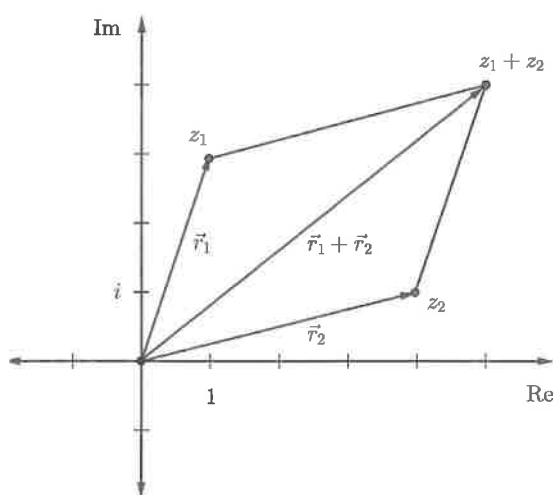
1

Kakšen geometrijski pomen ima seštevanje kompleksnih števil?

Urejeni par realnih števil (a, b) , ki določa kompleksno število $z_1 = a + bi$, je krajevni vektor $\vec{r}_1 = (a, b)$ točke, ki predstavlja to kompleksno število v kompleksni ravnini.

Urejeni par realnih števil (c, d) je krajevni vektor $\vec{r}_2 = (c, d)$ točke, ki upodobi kompleksno število z_2 .

Vsota obeh krajevnih vektorjev $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$ je krajevni vektor točke, ki upodobi vsoto obeh kompleksnih števil, $z_1 + z_2$.



17 Množenje kompleksnih števil

Št. točk

1

Definirajte operacijo množenja v množici \mathbb{C} .

Naj bosta $z_1 = a + bi$ in $z_2 = c + di$ kompleksni števili. Potem je

$$z_1 \cdot z_2 = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Do te definicije pridemo tako, da števili z_1 in z_2 zmnožimo tako, kot tudi sicer množimo dvočlenike, pri tem pa upoštevamo, da je $i^2 = -1$.

Št. točk

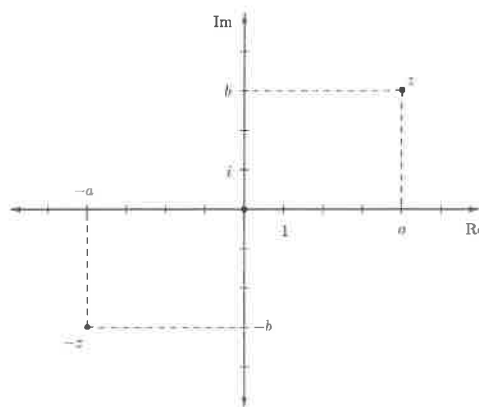
1

Opišite geometrijski pomen množenja kompleksnega števila z -1 in geometrijski pomen množenja kompleksnega števila z realnim številom.

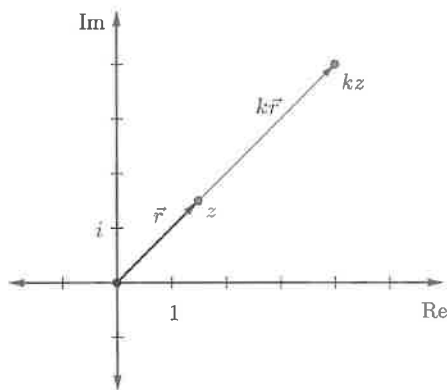
Naj bo $z = a + bi$ kompleksno število. Naj bo par realnih števil (a, b) krajevni vektor točke v kompleksni ravnini, ki upodobi število z .

Če pomnožimo kompleksno število z s številom -1 , dobimo njegovo nasprotno število. Točki, ki števili upodobita v kompleksni ravnini sta simetrični glede na koordinatno izhodišče.

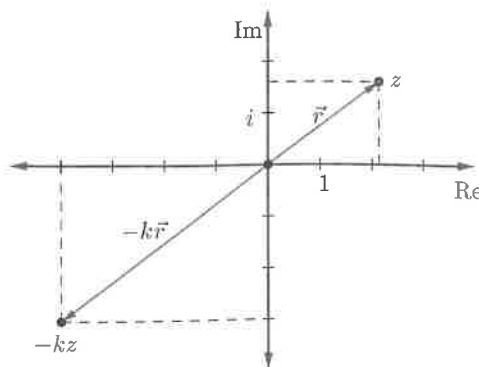
Pri geometrijskem pomenu množenja kompleksnega števila z nen ničelnim realnim številom ločimo primere množenja s pozitivnim in z negativnim realnim številom.



- Produkt kompleksnega števila z in pozitivnega realnega števila k pa upodobimo s krajevnim vektorjem $k\vec{r} = (ka, kb)$, ki je razteg vektorja $\vec{r} = (a, b)$ iz koordinatnega izhodišča za faktor k . Vektorja \vec{r} in $k\vec{r}$ sta enako usmerjena.
- Produkt kompleksnega števila $z = a + bi$ z negativnim realnim številom $-k$ upodobimo s krajevnim vektorjem $-k\vec{r} = (-ka, -kb)$, ki je razteg vektorja $\vec{r} = (a, b)$ iz koordinatnega izhodišča, a nasprotno usmerjen.



a)



b)

Št. točk

3

Naštejte vsaj dve lastnosti množenja kompleksnih števil in vsaj eno od njih dokažite.

Lastnosti množenja kompleksnih števil:

- a) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ komutativnost množenja,
 b) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ asociativnost množenja,
 c) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ distributivnost.

DOKAZ. Označimo $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ in $z_3 = e + fi$.

- a) Upoštevamo komutativnost seštevanja in množenja v realnih številih.

$$z_1 \cdot z_2 = ac - bd + (ad + bc)i$$

$$z_2 \cdot z_1 = ca - db + (cb + da)i = ac - bd + (ad + bc)i = z_1 \cdot z_2.$$

- b) Upoštevamo komutativnost seštevanja in množenja v realnih številih.

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = ace - ebd - adf - cbf + (aed + ceb + acf - bdf)i$$

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = ace - adf - cbf - ebd + (acf + aed + ceb - bdf)i = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$$

- c) Razvijemo levo in desno stran enakosti

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (a + bi) \cdot (c + e + (d + f)i) = ac + ae - bd - bf + (ad + af + bc + be)i$$

$$z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 = (a + bi) \cdot (c + di) + (a + bi) \cdot (e + fi) = ac + ae - bd - bf + (ad + af + bc + be)i$$

Očitno sta leva in desna stran enaki, zato sledi $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$. \square

Št. točk

1

Naj bo n naravno število. Izračunajte i^n .

Naj bo $n = 4k + r$, $k \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Potem velja:

$$i^{4k+r} = i^{4k}i^r = i^r.$$

Potenca imaginarne enote je odvisna le od ostanka eksponenta pri deljenju s 4.

Velja torej $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$ in $i^{4k+3} = -i$.

18 Absolutna vrednost kompleksnega števila

Št. točk

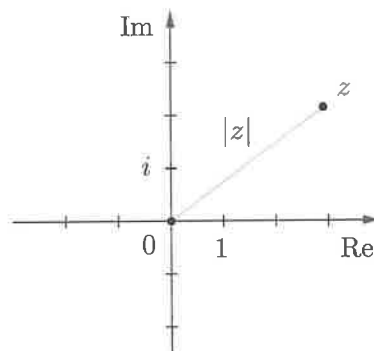
2

Definirajte absolutno vrednost kompleksnega števila in predstavite njen geometrijski pomen.

Naj bo $z = a + bi$ kompleksno število, kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$. Absolutna vrednost kompleksnega števila z je nenegativno realno število, katerega kvadrat je enak produktu danega kompleksnega števila in njemu konjugiranega kompleksnega števila:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Absolutna vrednost kompleksnega števila geometrijsko predstavlja oddaljenost točke, ki v kompleksni ravnini predstavlja kompleksno število z , od koordinatnega izhodišča.



Št. točk

3

Naštejte vsaj dve lastnosti absolutne vrednosti kompleksnega števila in vsaj eno od njih dokažite.

Naj bodo $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Potem velja:

- $|z| \geq 0$ absolutna vrednost kompleksnega števila je nenegativno realno število,
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ število 0 je edino število, katerega absolutna vrednost je 0,
- $|z| = |-z|$ število z in njegova nasprotna vrednost imata enaki absolutni vrednosti,
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ absolutna vrednost produkta je enaka produktu absolutnih vrednosti,
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$ absolutna vrednost količnika je enaka količniku absolutnih vrednosti,
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ trikotniška neenakost.

DOKAZ. Naj bo $z_1 = a + bi$ in $z_2 = c + di$.

a) Izhajamo iz definicije absolutne vrednosti. Vrednost korena je nenegativno realno število, zato velja $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$.

b) Naj bo $|z| = 0$. Potem je $\sqrt{a^2 + b^2} = 0$, od koder sledi $a = 0$ in $b = 0$. Zato je $z = a + bi = 0$.

Naj bo $z = 0$. Potem je $z = 0 + 0 \cdot i$ in $|z| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$.

Od tod sledi $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

c) Preoblikujemo:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = |-a - bi| = |-z|.$$

d) Razvijemo levo in desno stran:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |ac - bd + (ad + bc)i| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} \\ |z_1| \cdot |z_2| &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} = |z_1 \cdot z_2|. \end{aligned}$$

e) Uporabimo lastnost iz prejšnje točke:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \cdot \left| \frac{1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Št. točk

1

Pojasnite absolutno vrednost kompleksnega števila z , če je $\text{Im}(z) = 0$ ali $\text{Re}(z) = 0$.

Naj bo $z = a + bi$ kompleksno število.

Če je $\text{Im}(z) = b = 0$, je $|z| = |a|$.

Če je $\text{Re}(z) = a = 0$, je $|z| = |b|$.

19 Konjugirana vrednost kompleksnega števila

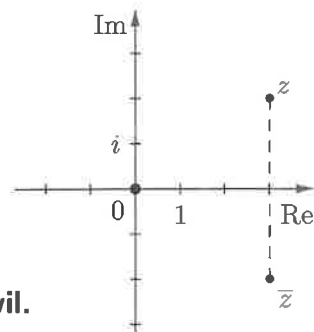
Št. točk

1

Definirajte konjugirano vrednost kompleksnega števila in razložite njen geometrijski pomen.

Naj bo $z = a + bi$ neko kompleksno število, pri čemer sta a in b realni števili. Potem je **konjugirana vrednost** tega kompleksnega števila enaka $\bar{z} = a - bi$.

Točki, ki predstavljata kompleksni števili z in \bar{z} , ležita v kompleksni ravnini simetrično glede na realno os.



Št. točk

3

Naštejte vsaj tri lastnosti konjugiranja kompleksnih števil.

Naj bodo $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Potem velja:

- | | |
|---|---|
| $\overline{(\bar{z})} = z$ | konjugiranost je vzajemna, |
| $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ | konjugirana vrednost vsote je enaka vsoti konjugiranih vrednosti, |
| $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ | konjugirana vrednost produkta je enaka produktu konjugiranih vrednosti, |
| $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0$ | konjugirana vrednost količnika je enaka količniku konjugiranih vrednosti, |
| $\overline{(-z)} = -\bar{z}$ | konjugirana vrednost nasprotnne vrednosti je enaka nasprotni vrednosti konjugirane vrednosti. |

Št. točk

2

Dokažite, da je konjugirana vrednost produkta dveh kompleksnih števil enaka produktu njunih konjugiranih vrednosti.

DOKAZ. Naj bosta $z_1 = a + bi$ in $z_2 = c + di$ kompleksni števili. Velja

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (bc + ad)i} = ac - bd - (bc + ad)i,$$

po drugi strani pa je

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a - bi)(c - di) = ac - bd - (bc + ad)i,$$

iz česar sledi, da je $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$. □

20 Enačbe

Št. točk

2

Kaj je enačba in kaj je rešitev enačbe? Kdaj sta dve enačbi ekvivalentni?

Enačba je vsak zapis oblike $I_1(x) = I_2(x)$, kjer sta $I_1(x)$ in $I_2(x)$ poljubna izraza, x pa je neznanka. Rešitev enačbe je vsako število a , za katero sta vrednosti izrazov enaki: $I_1(a) = I_2(a)$.

Enačbi sta **ekvivalentni**, če imata enako množico rešitev.

Št. točk

2

Opišite postopke, ki dano enačbo prevedejo v ekvivalentno enačbo.

Preoblikovana enačba je ekvivalentna prvotni, če:

- na obeh straneh prvotne enačbe prištejemo isto znano število ali izraz,
- obe strani prvotne enačbe pomnožimo z istim, od 0 različnim številom ali izrazom,
- obe strani prvotne enačbe delimo z istim, od 0 različnim številom ali izrazom.

Št. točk

1

Povejte primer enačbe, ki ni linearna, in jo rešite.

Primer nelinearne enačbe je enačba $x^2 + 4x - 5 = 0$. Enačba je razcepna kvadratna enačba, ki jo lahko razstavimo v

$$(x + 5)(x - 1) = 0.$$

Zmnožek faktorjev $x + 5$ in $x - 1$ je enak 0, kar pa bo veljalo, če je vsaj en faktor enak 0. Od tod dobimo dve rešitvi: $x_1 = -5$ in $x_2 = 1$.

Št. točk

1

Povejte primer dveh enačb, ki nista ekvivalentni.

Enačbi $x^2 = 1$ in $x - 1 = 0$ nista ekvivalentni. Množica rešitev prve enačbe v realnih številih je $\{-1, 1\}$, množica rešitev druge enačbe v realnih številih pa je $\{1\}$. Ker imata enačbi različno množico rešitev, nista ekvivalentni.

21 Potence s celimi eksponenti

Št. točk

1

Definirajte potenco z naravnim in potenco s celim eksponentom.

Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $a \in \mathbb{R}$. Potem je **potenca z naravnim eksponentom** a^n zmnožek n faktorjev števila a , kar zapišemo kot

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-krat}} = a^n.$$

Naj bo $n \in \mathbb{Z}$. Za realno število $a \neq 0$ je **potenca s celim eksponentom** a^n :

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-krat}}, \text{ če je } n > 0 \quad a^n = 1, \text{ če je } n = 0, \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}}, \text{ če je } n < 0.$$

Št. točk

3

Naštejte vsaj tri pravila za računanje s potencami s celimi eksponenti.

Naj bosta $m, n \in \mathbb{Z}$ in $a \neq 0$. Potem velja:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ množenje potenc z enakima osnovama,
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ potenciranje,
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ deljenje potenc z enakima osnovama,
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ množenje potenc z enakima eksponentoma,
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ deljenje potenc z enakima eksponentoma.

Št. točk

2

Dokažite vsaj dve izmed zgornjih pravil.

DOKAZ.

a) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

- Če je vsaj eden od eksponentov enak 0, potem enakost velja:

$$a^0 \cdot a^n = a^n = a^{0+n} = a^n; \quad a^0 \cdot a^0 = 1 = a^{0+0} = 1.$$

- Če sta eksponenta naravni števili, potem je v potenci a^m natanko m faktorjev števila a , v potenci a^n pa n faktorjev števila a . Torej je v produktu $a^m \cdot a^n$ natanko $m + n$ faktorjev števila a , kar zapišemo a^{m+n} . Pravilo velja.
- Naj bosta oba eksponenta negativni celi števili, na primer $-m$ in $-n$, pri čemer sta $m, n \in \mathbb{N}$.

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = (a^m)^{-1} \cdot (a^n)^{-1} = (a^{m+n})^{-1} = a^{-(m+n)} = a^{(-m)+(-n)}$$

- Zmnožiti moramo le še potenci z različno predznačenima eksponentoma, na primer m in $-n$, pri čemer sta $m, n \in \mathbb{N}$.

Če je $m > n$, razčlenimo $m = n + (m - n)$. Potem je

$$a^m \cdot a^{-n} = a^{n+(m-n)} \cdot a^{-n} = a^{m-n} \cdot a^n \cdot a^{-n} = a^{m-n} \cdot (a^n) \cdot (a^n)^{-1} = a^{m-n} = a^{m+(-n)}$$

Za $n > m$ je dokaz analogen, le da n nadomestimo z $m + (n - m)$.

b) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

- Če je $m > 0$, velja $(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \dots \cdot a^n}_{m\text{-krat}} = a^{n+n+\dots+n} = a^{mn}$.
- Če je $m = 0$, velja $(a^n)^m = (a^n)^0 = 1 = a^0 = a^{n \cdot 0} = a^{nm}$.
- V primeru $m < 0$ bomo izraz na levi preoblikovali in upoštevali pravilo za računanje s potencami z naravnimi eksponenti, dokazano pri prvi pikici tega dokaza:

$$(a^n)^m = \frac{1}{(a^n)^{-m}} = \frac{1}{\underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \dots \cdot a^n}_{-m\text{-krat}}} = \frac{1}{a^{-m \cdot n}} = a^{mn}$$

c) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Levo stran preoblikujemo in uporabimo točko a):

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n+(-m)} = a^{n-m}$$

d) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

- Obravnavajmo najprej primer $n > 0$. V potenci a^n je n faktorjev števila a , v potenci b^n pa n faktorjev števila b , kar zapišemo

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-krat}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n\text{-krat}}$$

Zaradi zakona o zamenjavi faktorjev in zakona o združevanju faktorjev lahko izraz zapišemo kot

$$\underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{n\text{-krat}} = (a \cdot b)^n$$

- Poglejmo zdaj primer, ko je eksponent negativno število. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $-n$ naš eksponent. Potem je

$$\begin{aligned} a^{-n} \cdot b^{-n} &= (a^{-1})^n \cdot (b^{-1})^n = (a^{-1} \cdot b^{-1})^n = \left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}\right)^n = \left(\frac{1}{a \cdot b}\right)^n = \\ &= \left((a \cdot b)^{-1}\right)^n = (a \cdot b)^{-n} \end{aligned}$$

e) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Levo stran preoblikujemo in uporabimo točko d) tega izreka:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^n = a^n \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^n = a^n \cdot \frac{1^n}{b^n} = \frac{a^n}{b^n}$$

□

22 Koreni

Št. točk

1

Za poljubno liho naravno število n in za poljubno realno število x definirajte n -ti koren števila x .

Naj bo n liho naravno število. Potem je n -ti koren števila x tako realno število a , da velja $a^n = x$.

$$\sqrt[n]{x} = a \Leftrightarrow a^n = x$$

Št. točk

1

Za poljubno sodo naravno število n in za poljubno nenegativno realno število x definirajte n -ti koren števila x .

Naj bo n sodo naravno število in x poljubno nenegativno realno število. Potem je n -ti koren števila x tako nenegativno realno število a , da velja $a^n = x$.

$$\sqrt[n]{x} = a \Leftrightarrow a^n = x$$

Št. točk

4

Povejte vsaj tri pravila za računanje s koreni in enega izmed njih dokažite.

Naj bodo m, n in p poljubna naravna števila in naj bosta $a, b \geq 0$. Potem velja:

- $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ korenski in potenčni eksponent lahko pomnožimo ali delimo z istim naravnim številom,
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ množenje korenov z enakima stopnjama,
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $b \neq 0, +$ deljenje korenov z enakima stopnjama,
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ vrstni red korenjenja in potenciranja ni pomemben,
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ sestavljanje korenov.

DOKAZ.

a) Označimo $\sqrt[n]{a^m} = b$. Po definiciji n -tega korena je $a^m = b^n$. Enakost potenciramo s p in dobimo $(a^m)^p = (b^n)^p$ oziroma $a^{mp} = b^{np}$. Po definiciji (np) -tega korena velja $\sqrt[np]{a^{mp}} = b$, od koder sledi $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$.

b) Označimo $\sqrt[n]{a} = c$ in $\sqrt[n]{b} = d$. Po definiciji sledi $a = c^n$ in $b = d^n$.

Upoštevamo pravila za računanje s potencami z naravnimi eksponenti:

$$ab = c^n \cdot d^n = (cd)^n$$

oziroma $ab = (cd)^n$. Po definiciji n -tega korena sledi $\sqrt[n]{ab} = cd = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

c) Označimo $\sqrt[n]{a} = c$ in $\sqrt[n]{b} = d$. Po definiciji sledi $a = c^n$ in $b = d^n$.

Upoštevamo pravila za računanje s potencami s celimi eksponenti. $\frac{a}{b} = \frac{c^n}{d^n} = \left(\frac{c}{d}\right)^n$ oziroma $\frac{a}{b} = \left(\frac{c}{d}\right)^n$. Po definiciji n -tega korena sledi $\frac{c}{d} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ oziroma $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

d) Velja

$$(\sqrt[m]{a})^m = \underbrace{\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[m]{a}}_{m\text{-krat}} = \underbrace{\sqrt[m]{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}}_{m\text{-krat}} = \sqrt[m]{a^m},$$

pri čemer smo upoštevali že dokazano lastnost pri točki b).

e) Naj bo $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = x$. Po definiciji m -tega korena je to ekvivalentno $\sqrt[m]{a} = x^m$.

Po isti definiciji, vendar za n -ti koren, sedaj lahko pišemo $a = (x^m)^n$.

Upoštevamo pravilo za računanje s potencami z naravnimi eksponenti, ki pravi, da je

$$(x^m)^n = x^{mn} = a.$$

Po definiciji (mn) -tega korena pa to pomeni, da je $\sqrt[mn]{a} = x = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$. □

24 Premice

Št. točk

1

Definirajte vzporednost premic v ravnini in vzporednost premic v prostoru.

Premici v ravnini sta **vzporedni**, če nimata nobene skupne točke ali sovpadata.

Premici v prostoru sta **vzporedni**, če ležita v isti ravnini in nimata nobene skupne točke ali sovpadata.

Št. točk

2

Naštejte vse možne medsebojne lege dveh premic v prostoru.

Premici v prostoru

- lahko nimata skupnih točk (sta vzporednici ali mimobežnici),
- lahko sovpadata (eden od primerov vzporednosti)
- se lahko sekata v natanko eni točki.

Št. točk

2

Naštejte vsaj dve lastnosti relacije vzporednosti premic v prostoru.

Relacija vzporednosti premic v prostoru je

- **refleksivna**: vsaka premica je vzporedna sama sebi,
- **simetrična**: če je premica p vzporedna premici q , je tudi premica q vzporedna premici p ,
- **tranzitivna**: če je premica p vzporedna premici q in premica q vzporedna premici r , je tudi p vzporedna r .

Št. točk

1

Povejte aksiom o vzporednici.

Za dano premico p in dano točko A v ravnini obstaja natanko ena premica, ki poteka skozi točko A in je premici p vzporedna.

25 Koti

Št. točk

2

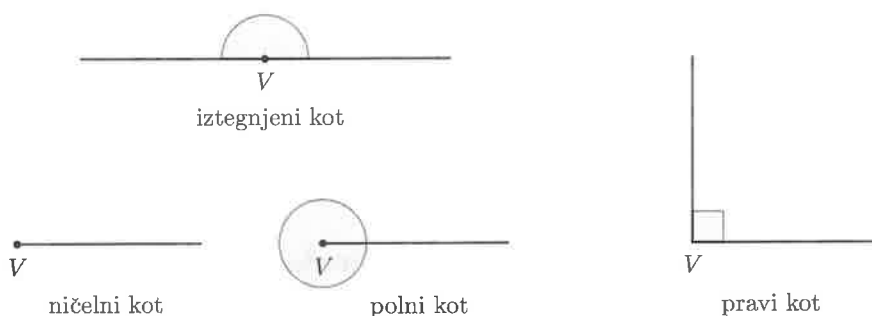
Pojasnite pojme ničelni, pravi, iztegnjeni in polni kot.

Ničelni kot je kot, pri katerem se kraka prekrivata, notranjost pa je prazna.

Če sta sokota (sosedna kota, katerih kraka, ki nista skupna, ležita na isti premici) skladna, je vsak od njiju **pravi kot**.

Iztegnjeni kot je kot, pri katerem se kraka dopolnjujeta v premico.

Polni kot je kot, pri katerem se kraka prekrivata, notranjost pa je cela ravnina.



Št. točk

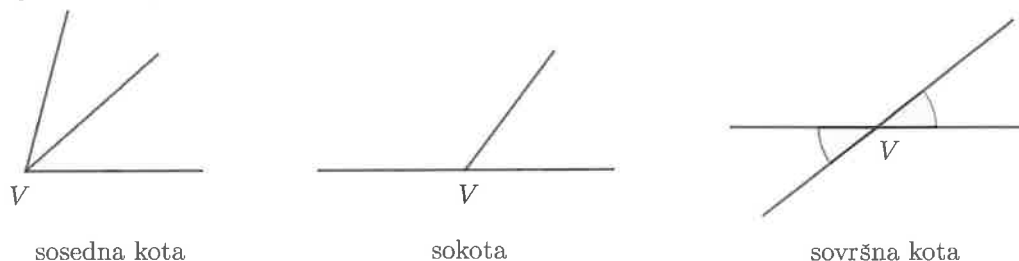
2

Pojasnite pojme sosredna kota, sokota in sovršna kota.

Sosedna kota sta kota, ki imata skupen krak, presek njunih notranjosti pa je prazna množica.

Sokota sta sosredna kota, katerih kraka, ki nista skupna, ležita na isti premici.

Sovršna kota sta kota, ki imata skupen vrh, vsak krak prvega kota pa se s krakom drugega kota dopolni v premico.



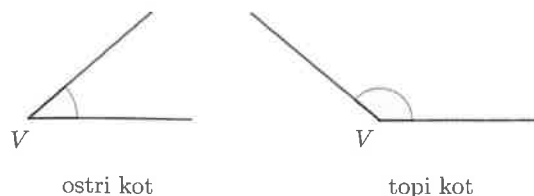
Št. točk

2

Kdaj je dani kot oster in kdaj top? Največ koliko notranjih kotov poljubnega štirikotnika je lahko topih?

Ostri kot je vsak kot, ki je manjši od pravega kota.

Topi kot je večji od pravega in manjši od iztegnjenega kota.



Ker je vsota notranjih kotov poljubnega štirikotnika 360° , za topi kot α pa velja $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, ima lahko poljubni štirikotnik **največ tri tope kote**. Primer takega štirikotnika je štirikotnik z notranjimi koti 100° , 95° , 105° in 60° .

Štirikotnik ne more imeti štirih topih kotov, saj bi za njihovo vsoto veljalo

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta > 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ,$$

kar pa je protislovje, saj bi v tem primeru vsota notranjih kotov presegala 360° .

26 Koti

Št. točk

1

Definirajte skladnost kotov.

Dva kota sta **skladna**, če obstaja toga preslikava, ki preslika en kot v drugega.

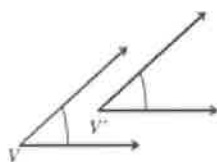
Skladna kota sta enako velika.

Št. točk

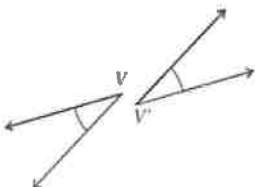
2

Kaj velja za kota, ki imata paroma vzporedne krake? Narišite skice in razložite.

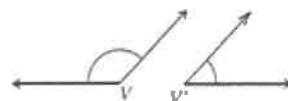
- Kota, ki imata oba para krakov vzporedna v isto smer, sta skladna.
- Kota, ki imata oba para krakov vzporedna v nasprotno smer, sta skladna.
- Kota, ki imata en par krakov vzporeden v isto, drugi par pa v nasprotno smer, sta suplementarna (njuna vsota je 180°).



a)



b)



c)

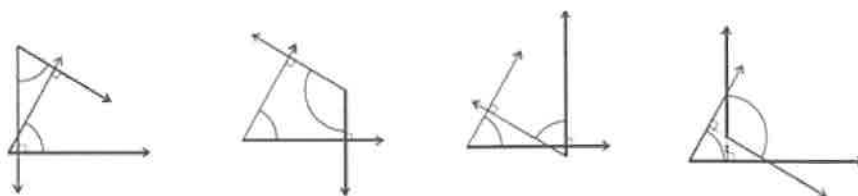
Št. točk

2

Kaj velja za kota, ki imata paroma pravokotne krake? Narišite skice in razložite.

Kota s paroma pravokotnimi kraki sta bodisi skladna bodisi suplementarna.

V prvem in tretjem primeru sta kota s paroma pravokotnimi kraki skladna, v drugem in četrtem pa suplementarna.



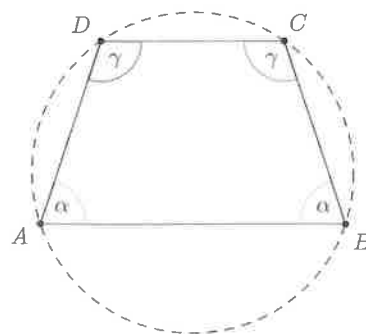
Št. točk

1

Notranji kot $\angle BAD$ trapeza $ABCD$, ki mu lahko očrtamo krožnico, meri α . Koliko merijo ostali notranji koti tega trapeza?

Štirikotnik, ki mu lahko očrtamo krožnico, imenujemo tetivni štirikotnik. Za tetivni štirikotnik velja, da sta nasprotna kota suplementarna.

Tako je kot $\gamma = 180^\circ - \alpha$. Poleg tega lahko krožnico očrtamo le enakokrakemu trapezu in zato je $\beta = \alpha$ in $\delta = \gamma = 180^\circ - \alpha$.



27 Trikotnik

Št. točk

1

Definirajte trikotnik.

Trikotnik ABC je konveksna množica točk v ravnini, ki je omejena z zveznicami treh nekolinearnih točk A , B in C .

Točke A , B in C so oglišča trikotnika, daljice AB , BC in AC pa **stranice** trikotnika.

Št. točk

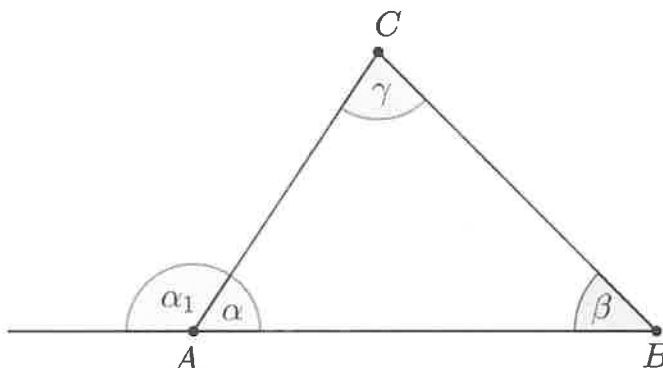
2

Definirajte notranji in zunanji kot trikotnika.

Notranji kot trikotnika je kot, ki ima vrh v oglišču trikotnika, njegova kraka pa ležita na stranicah trikotnika.

Zunanji kot trikotnika je sokot notranjemu kotu.

Na skici spodaj so α , β in γ notranji koti, kot α_1 pa zunanji kot trikotnika ABC .



Št. točk

1

Kolikšna je vsota notranjih kotov trikotnika?

Vsota notranjih kotov trikotnika je enaka 180° .

Št. točk

2

Kolikšna je vsota zunanjih kotov trikotnika? Trditev dokažite.

Vsota zunanjih kotov trikotnika je enaka 360° .

DOKAZ. Naj bodo α , β in γ notranji koti ter α_1 , β_1 in γ_1 zunanji koti trikotnika ABC . Zunanje kote lahko izrazimo z notranjimi kot:

$$\alpha_1 = 180^\circ - \alpha, \beta_1 = 180^\circ - \beta \text{ in } \gamma_1 = 180^\circ - \gamma.$$

Izračunajmo njihovo vsoto

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta + 180^\circ - \gamma = 3 \cdot 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ.$$

Dokaz je končan. □

28 Znamenite točke trikotnika

Št. točk

3

Opišite konstrukcije simetrale daljice, simetrale kota in višine na stranico trikotnika.

a) Konstrukcija simetrale daljice.

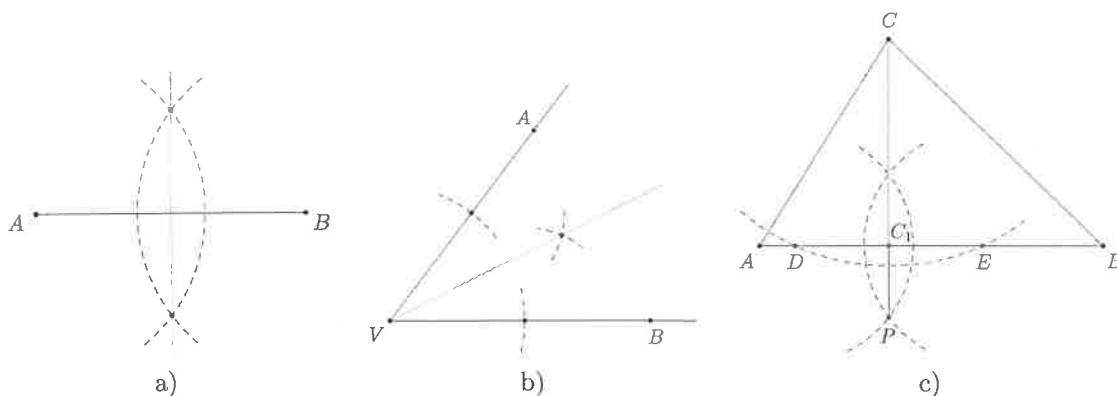
Zapičimo šestilo v vsako od krajišč daljice AB in na obe polravnini, katerih rob je nosilka te daljice, odmerimo lok z enakim pripadajočim polmerom. Dolžina loka mora biti daljša od polovice dolžine te daljice. Točki, v katerih se loka sekata, povežemo med seboj v simetralo daljice.

b) Konstrukcija simetrale kota.

Narišemo lok l poljubne dolžine s središčem v vrhu kota V . Lok seka kraka kota v točkah A in B . Poltrak, ki razpolavlja lok AB , razpolavlja tudi dani kot $\angle AVB$. Iz točk A in B odmerimo lok enake dolžine, ki pa je daljši od polovice loka AB . Presečišče teh lokov povežemo z vrhom kota v simetralo kota.

c) Konstrukcija višine na stranico trikotnika.

Višino na stranico c v trikotniku ABC konstruiramo tako, kot konstruiramo pravokotnico iz dane točke na dano premico. Narišemo lok s središčem v C , ki seka stranico AB dvakrat, na primer v točkah D in E . Točka C leži na simetrali daljice DE . Narišemo enako dolga loka iz točk D in E , ki se sekata v točki P . Presečišče lokov povežemo s točko C v simetralo daljice DE in presečišče simetrale ter daljice DE označimo s C_1 . Daljica CC_1 je višina na stranico AB .



Št. točk

3

Kako poiščemo središče trikotniku očrtanega kroga, središče trikotniku včrtanega kroga in višinsko točko trikotnika?

Središče trikotniku očrtanega kroga je presečišče simetral stranic danega trikotnika.

Središče trikotniku včrtanega kroga je presečišče simetral kotov danega trikotnika.

Višinska točka je presečišče višin trikotnika.

29 Skladnost likov

Št. točk

1

Definirajte skladnost likov.

Lika L_1 in L_2 sta **skladna**, če obstaja toga preslikava, ki preslika lik L_1 na lik L_2 ali obratno tako, da se popolnoma prekrijeta. Skladnost likov označimo z $L_1 \cong L_2$.

Št. točk

4

Povejte štiri izreke o skladnosti trikotnikov.

Trikotnika sta skladna, če

- se ujemata v vseh treh stranicah,
- se ujemata v dveh stranicah in kotu med njima,
- se ujemata v stranici in njej priležnih kotih,
- se ujemata v dveh stranicah in kotu, ki leži daljši stranici nasproti.

Št. točk

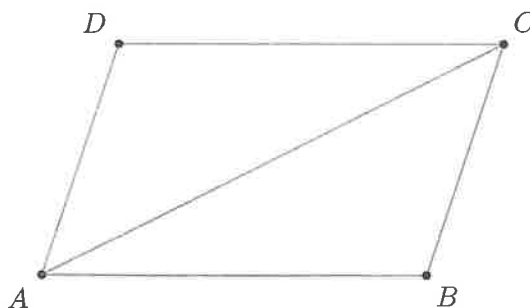
2

V paralelogramu narišemo eno diagonalo. Dokažite, da sta tako dobljena trikotnika skladna.

Imejmo paralelogram $ABCD$. Za paralelogram velja $|AB| = |CD|$ in $|BC| = |AD|$.

Diagonala AC razdeli paralelogram na trikotnika ABC in ACD . Trikotnika se ujemata v skupni stranici (diagonali AC) kot tudi v preostalih dveh stranicah, saj velja $|AB| = |CD|$ in $|BC| = |AD|$.

Trikotnika ABC in ACD se torej ujemata v treh stranicah. Po skladnostnem izreku iz točke a) pri prejšnjem vprašanju sledi, da sta ta trikotnika skladna.



30 Podobnost likov

Št. točk

1

Definirajte podobnost likov.

Lika L_1 in L_2 sta **podobna**, če obstaja podobnostna preslikava, ki preslika lik L_1 na lik L_2 ali obratno. Podobnost likov L_1 in L_2 označimo z $L_1 \sim L_2$.

Osnovni primer podobnostne preslikave je **homotetija** ali **središčni razteg**.

Št. točk

3

Povejte tri izreke o podobnosti trikotnikov.

Dva trikotnika ABC in $A'B'C'$ sta podobna, če se ujemata

- v dveh notranjih kotih,
- v kotu in razmerju stranic, ki kot oklepata,
- v dveh razmerjih istoležnih stranic.

Št. točk

2

V pravokotnem trikotniku narišemo višino na hipotenuzo. Koliko podobnih trikotnikov nastane? Dokažite Evklidov ali višinski izrek.

Imejmo pravokotni trikotnik ABC s katetama a in b ter hipotenuzo $c = |AB|$. Naj bo D nožišče višine na AB . Če narišemo višino na hipotenuzo $v_c = |CD|$, nastanejo trije pari podobnih trikotnikov:

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD,$$

saj se ujemajo v notranjih kotih.

Višinski izrek: Naj bosta $a_1 = |BD|$ in $b_1 = |AD|$ pravokotni projekciji katet na hipotenuzo. Potem velja, da je produkt pravokotnih projekcij katet na hipotenuzo enak kvadratu višine na hipotenuzo.

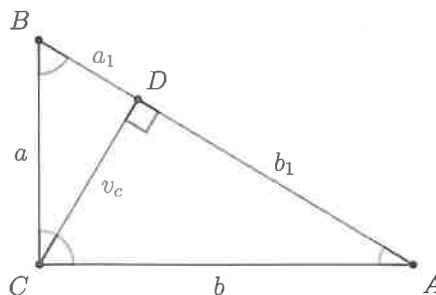
$$a_1 \cdot b_1 = v_c^2$$

DOKAZ. Iz podobnosti $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ sledi $|AD| : |CD| = |CD| : |BD|$ oziroma $\frac{b_1}{v_c} = \frac{v_c}{a_1}$, kar je ekvivalentno $v_c^2 = a_1 \cdot b_1$. \square

Evklidov izrek: Kvadrat katete je enak produktu hipotenuze in pravokotne projekcije te katete na hipotenuzo.

$$a^2 = a_1 \cdot c, \quad b^2 = b_1 \cdot c$$

DOKAZ. Iz podobnosti $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ sledi $|AB| : |BC| = |BC| : |BD|$ oziroma $\frac{c}{a} = \frac{a}{a_1}$, od koder sledi $c \cdot a_1 = a^2$. Na podoben način iz podobnosti $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ izpeljemo $c \cdot b_1 = b^2$. \square



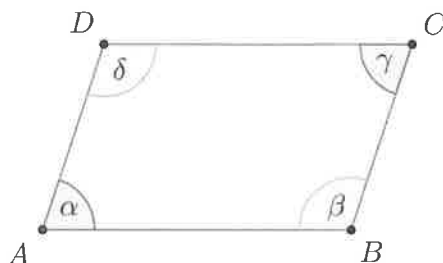
31 Paralelogram

Št. točk

1

Definirajte paralelogram.

Paralelogram je štirikotnik z dvema paroma vzporednih stranic.



Št. točk

2

Navedite lastnosti kotov in stranic paralelograma.

V paralelogramu sta nasprotni stranici enako dolgi, nasprotna kota sta skladna, kota, ki ležita ob isti stranici, pa sta suplementarna.

Št. točk

1

Navedite posebne vrste paralelogramov in opišite njihove lastnosti.

Romb je paralelogram s skladnimi stranicami: $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$. Diagonali v rombu sta pravokotni in se tako kot v vsakem paralelogramu razpolavljata.

Pravokotnik je paralelogram s skladnimi notranjimi koti: $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$.

Kvadrat je paralelogram, ki je hkrati romb in pravokotnik. Ima torej skladne stranice kot tudi notranje kote. Diagonali v kvadratu sta med seboj pravokotni.

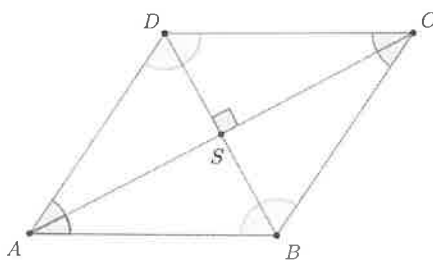
Št. točk

2

Dokažite, da se diagonali v rombu sekata pod pravim kotom.

DOKAZ. Naj bo $ABCD$ romb in S presečišče njegovih diagonal. Ker se diagonali v paralelogramu (kar je tudi romb) razpolavljata, je $\triangle ABS$ skladen $\triangle ADS$, saj imata skladne vse tri stranice. Od tod sledi $\angle DSA = \angle ASB$. Ker pa sta $\angle DSA$ in $\angle ASB$ tudi sokota, velja $\angle DSA + \angle ASB = 180^\circ$.

Od tod sledi $\angle ASB = \angle DSA = 90^\circ$, kar pomeni, da se diagonali v rombu sekata pod pravim kotom. \square



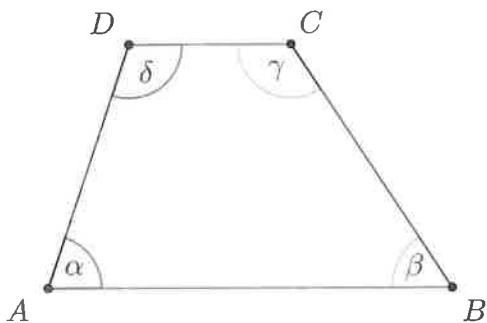
32 Trapez

Št. točk

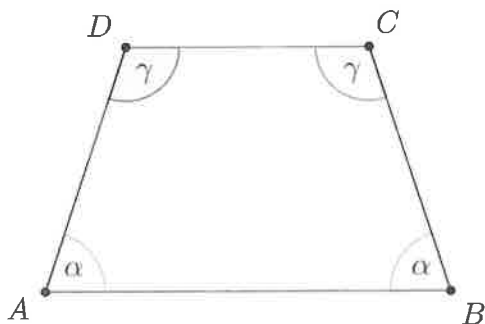
1

Definirajte trapez.

Trapez je štirikotnik z enim parom vzporednih stranic. Imenujemo ju **osnovnici**, drugi dve stranici pa **kraka**.



Trapez



Enakokraki trapez

Št. točk

1

Navedite lastnosti kotov trapeza.

Vsota kotov ob istem kraku trapeza je enaka 180° . Vsota notranjih kotov je enaka 360° .

Št. točk

2

Kaj je srednjica trapeza in katere lastnosti ima?

Srednjica trapeza je daljica, ki povezuje razpolovišči obeh krakov.

Naj bo $ABCD$ trapez in naj bosta E in F razpolovišči krakov AD in BC tega trapeza. Potem je EF srednjica trapeza $ABCD$.

Označimo $|AB| = a$ in $|CD| = c$. Srednjica DE je vzporedna osnovnicama AB in CD ter enaka polovici vsote osnovnic:

$$|EF| = s = \frac{a + c}{2}.$$

Št. točk

2

Pri katerih trapezih sta diagonalni enako dolgi? Naj bo S presečišče diagonal takšnega trapeza. Izrazite razmerje dolžin $|AS| : |SC|$ z dolžinama osnovnic trapeza, kjer je AC ena izmed diagonal trapeza.

Diagonali sta enako dolgi pri **enakokrakih trapezih**.

Naj bosta a in c dolžini osnovnic enakokrakega trapeza $ABCD$ in S presečišče njegovih diagonal. Trikotnika $\triangle ABS$ in $\triangle CDS$ sta podobna, saj se ujemata v vseh notranjih kotih – v sovršnih kotih in v dveh parih izmeničnih kotov.

Od tod sledi

$$\frac{|AS|}{|SC|} = \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{a}{c}.$$

33 Premice in krožnice

Št. točk

3

V kakšni medsebojni legi sta lahko premica in krožnica, ki ležita v isti ravnini?

Imejmo premico in krožnico v isti ravnini. Premica in krožnica

- imata lahko 2 presečišči. V tem primeru premici rečemo **sekanta**;
- imata lahko 1 skupno točko, v kateri se premica dotika krožnice. V tem primeru premici rečemo **dotikalnica** ali **tangenta**;
- premica in krožnica lahko nimata presečišča. V tem primeru premici rečemo **mi-mobežnica**.

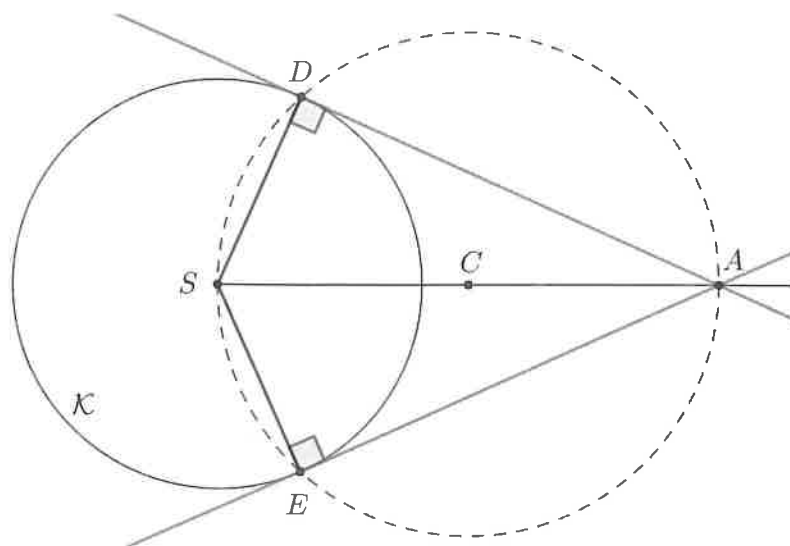
Št. točk

3

Podrobno opišite konstrukcijo tangente na krožnico skozi dano točko zunaj krožnice.

Imejmo krožnico \mathcal{K} s središčem S in neko točko A zunaj krožnice. Tangento na krožnico \mathcal{K} skozi točko A konstruiramo po sledečem postopku:

1. narišemo poltrak iz S skozi A ,
2. razpolovimo daljico SA in razpolovišče označimo s točko C ,
3. narišemo krožnico s središčem v C in premerom $|SA|$,
4. presečišči dobljene krožnice s krožnico \mathcal{K} označimo z D in E ,
5. premici AD in AE sta tangenti na krožnico \mathcal{K} .



34 Središčni in obodni kot

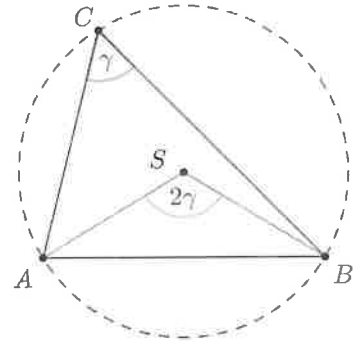
Št. točk

2

Definirajte središčni in obodni kot v krogu.

Naj bo S središče krožnice ter A in B različni točki na krožnici. Naj bo \widehat{AB} krožni lok. Kot, ki ga oklepata daljici SA in SB , tedaj imenujemo **središčni kot** nad krožnim lokom \widehat{AB} .

Naj točka C leži na krožnici, vendar ne na krožnem loku $l = \widehat{AB}$. Kot, ki ga oklepata tetivi CA in CB , tedaj imenujemo **obodni kot** nad krožnim lokom \widehat{AB} .



Št. točk

1

V kakšni zvezi sta, če ležita nad istim lokom v krogu?

Središčni kot je enak dvakratniku obodnega kota.

Št. točk

2

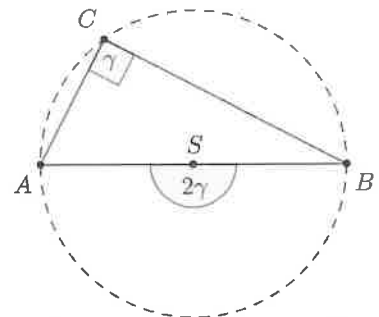
Povejte in dokažite Talesov izrek o kotu v polkrogu.

Talesov izrek pravi, da je obodni kot nad premerom krožnice pravi.

DOKAZ.

Naj bo S središče krožnice, AB njen premer in C poljubna, od A ter B različna, točka na krožnici. Središčni kot nad tetivo AB je očitno iztegnjeni kot, kar pomeni, da je $\angle ASB = 180^\circ$.

Izrek o središčnem in obodnem kotu pravi, da je središčni kot nad tetivo enak dvakratniku obodnega. Iz tega sledi, da je obodni kot nad premerom AB enak $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$, s čimer smo torej zaključili, da je obodni kot nad premerom krožnice pravi.



Št. točk

1

Kako uporabimo Talesov izrek pri konstrukciji pravokotnega trikotnika s podano hipotenuzo in višino na hipotenuzo?

Naj bo ABC pravokotni trikotnik, $c = |AB|$ hipotenuza in $v = |CD|$ višina na hipotenuzo. Konstrukcija poteka po sledečih korakih:

1. narišemo hipotenuzo AB ,
2. načrtamo razpolovišče hipotenuze S ,
3. načrtamo krožnico s središčem v S in polmerom $|AS| = |SB|$,
4. Narišemo vzporednico k AB , ki je od nje oddaljena za v ,
5. točka C je presečišče krožnice in vzporednice. Če dobimo dve presečišči, dobimo dve možnosti za točko C in načrtamo dva, med seboj zrcalna, skladna trikotnika.

35 Sinusni in kosinusni izrek

Št. točk

2

Povejte kosinusni izrek. Na primeru opišite njegovo uporabo.

V poljubnem trikotniku ABC velja, da je kvadrat dolžine poljubne stranice enak vsoti kvadratov dolžin preostalih stranic, zmanjšani za dvakratnik produkta dolžin teh stranic in kosinusa nasprotnega kota. Tako velja:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Uporabimo ga, ko imamo podani dve stranici in kot med njima, izračunati pa želimo tretjo stranico, ali ko imamo v trikotniku podane vse tri stranice in želimo izračunati kakšnega od notranjih kotov.

Navedimo primer uporabe kosinusnega izreka. Imejmo trikotnik ABC s skladnima stranicama $a = b = 3$ in kotom $\gamma = 120^\circ$ med njima. Dolžina tretje stranice c je torej:

$$c^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = \frac{27}{2} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Št. točk

2

Povejte sinusni izrek. Na primeru opišite njegovo uporabo.

V poljubnem trikotniku ABC je razmerje dolžine poljubne stranice in sinusa njej nasprotnega kota konstantno. Velja

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

kjer je R polmer trikotniku očrtane krožnice.

Sinusni izrek uporabljamo pri reševanju poljubnega trikotnika, če v njem poznamo:

- stranico in dva notranja kota,
- dve stranici in kot, ki leži eni od obeh stranic nasproti:
 - kot nasproti daljši stranici (ena rešitev),
 - kot nasproti krajši stranici (možni dve rešitvi),
- polmer očrtane krožnice in dve stranici,
- polmer očrtane krožnice in dva kota,
- polmer očrtane krožnice, eno stranico in kot, ki ne leži tej stranici nasproti.

Navedimo primer uporabe sinusnega izreka. Imejmo trikotnik ABC s podatki $a = 5$ cm, $b = 4$ cm in $\alpha = 30^\circ$. Izračunajmo kot β :

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha = \frac{4}{5} \cdot \sin 30^\circ = \frac{2}{5} \Rightarrow \beta = \arcsin \frac{2}{5} \doteq 23,6^\circ.$$

Dokažite enega izmed zgornjih izrekov.

DOKAZ. (kosinusni izrek): Kosinusni izrek bomo dokazali na dva načina: z vektorji in z definicijo kotnih funkcij v pravokotnem trikotniku v kombinaciji s Pitagorovim izrekom.

Način 1. Naj bo γ kot med vektorjema \vec{CA} in \vec{CB} .

Potem velja

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{CB} - \vec{CA}.$$

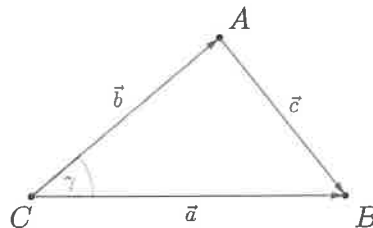
Vemo, da je $|\vec{CA}| = b$, $|\vec{CB}| = a$ in $|\vec{AB}| = c$.

Izračunajmo skalarni produkt $\vec{AB} \cdot \vec{AB}$ na dva načina.

Vemo, da je skalarni produkt $\vec{AB} \cdot \vec{AB}$ enak kvadratu

dolžine vektorja \vec{AB} , ki pa ustreza ravno dolžini stranice c . Vektor \vec{AB} pa smo izrazili tudi koz razliko vektorjev \vec{CB} in \vec{CA} , zato lahko skalarni produkt $\vec{AB} \cdot \vec{AB}$ izračunamo kot:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AB} &= \vec{AB} \cdot \vec{AB} \\ |\vec{AB}|^2 &= (\vec{CB} - \vec{CA}) \cdot (\vec{CB} - \vec{CA}) \\ |\vec{AB}|^2 &= \vec{CB} \cdot \vec{CB} - \vec{CB} \cdot \vec{CA} - \vec{CB} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{CA} \\ |\vec{AB}|^2 &= |\vec{CB}|^2 - 2\vec{CB} \cdot \vec{CA} + |\vec{CA}|^2 \\ c^2 &= a^2 - 2 \cdot |\vec{CB}| \cdot |\vec{CA}| \cdot \cos \gamma + b^2 \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

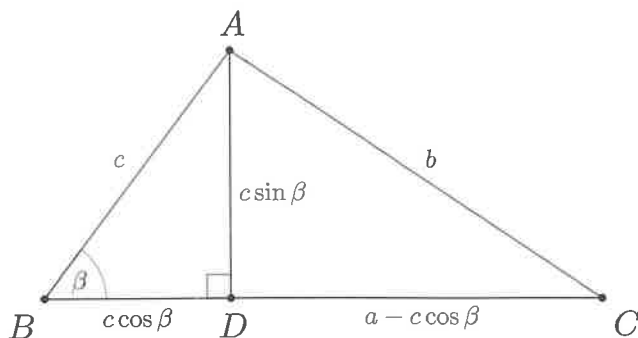


Na analogen način bi dobili tudi ostali dve različici izreka. □

Način 2. Naj bo ABC trikotnik in D nožišče višine na a . Označimo $|AB| = c$, $|BC| = a$ in $|AC| = b$. Potem velja $|AD| = c \sin \beta$ in $|DC| = a - c \cos \beta$. Zapišimo Pitagorov izrek za trikotnik DCA :

$$\begin{aligned} (c \sin \beta)^2 + (a - c \cos \beta)^2 &= b^2 \\ c^2 \sin^2 \beta + a^2 - 2ac \cos \beta + c^2 \cos^2 \beta &= b^2 \\ c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta &= b^2, \end{aligned}$$

pri čemer smo upoštevali $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$.



DOKAZ. (sinusni izrek): Sinusni izrek za trikotnik ABC posebej dokažemo za ostrokotni, topokotni in pravokotni trikotnik.

Naj bo ABC trikotnik s stranicami a, b in c , notranjimi koti α, β in γ ter polmerom očrtane krožnice R .

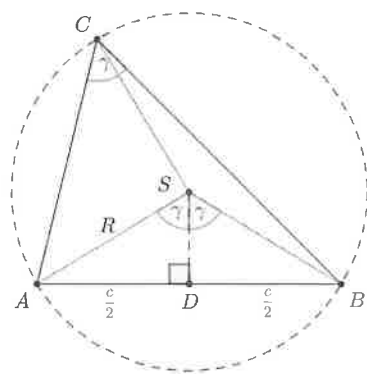
a) Naj bo ABC ostrokotni trikotnik in naj bo dana temu trikotniku očrtana krožnica.

Kot γ je obodni kot nad lokom AB . Potem je kot $\angle ASB$ središčni kot nad tem istim lokom in po izreku o središčnem in obodnem kotu velja $\angle ASB = 2\gamma$.

Opazimo, da je $\triangle ASB$ enakokrak z osnovnico AB . Višina na to osnovnico v $\triangle ASB$ razpolovi kot 2γ in osnovnico $c = AB$. V trikotniku $\triangle ADS$ velja $\sin \gamma = \frac{\frac{c}{2}}{R} = \frac{c}{2R}$, od koder sledi $2R = \frac{c}{\sin \gamma}$.

Na analogen bi dobili tudi $2R = \frac{a}{\sin \alpha}$ in $2R = \frac{b}{\sin \beta}$, od koder res sledi

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$



b)

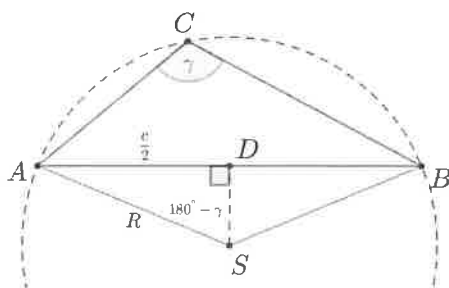
Naj bo ABC topokotni trikotnik s topim kotom γ in naj bo dana temu trikotniku očrtana krožnica.

Trikotnik ABS je enakokrak z osnovnico AB . Višina na to osnovnico razpolovi kot $360^\circ - 2\gamma$ in to osnovnico, zato velja

$$\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma = \frac{\frac{c}{2}}{R} = \frac{c}{2R},$$

iz česar sledi $2R = \frac{c}{\sin \gamma}$ in analogno $2R = \frac{b}{\sin \beta}$ in $2R = \frac{a}{\sin \alpha}$. Spet dobimo

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$



c) Naj bo $\triangle ABC$ pravokotni trikotnik s pravim kotom γ .

Potem velja

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{c}{\sin 90^\circ} = \frac{c}{1} = c = 2R.$$

Velja tudi

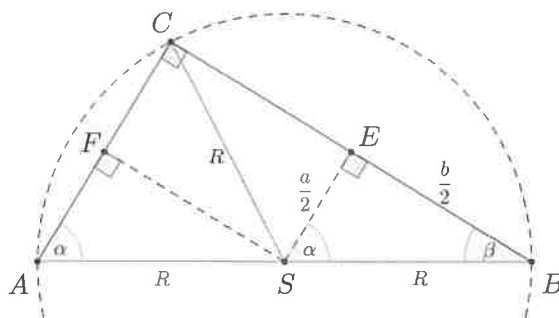
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\frac{a}{c}} = c = 2R$$

in

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{b}{\frac{b}{c}} = c = 2R,$$

iz česar vnovič sledi

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$



□

36 Ploščine likov

Št. točk

1

Navedite formulo za izračun ploščine trikotnika.

Ploščina trikotnika je enaka polovici zmnožka stranice in višine na to stranico oziroma polovici produkta dveh stranic in sinusa vmesnega kota:

$$S = \frac{av_a}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2}.$$

Št. točk

1

Navedite formulo za izračun ploščine paralelograma.

Ploščina paralelograma je enaka zmnožku stranice in višine na to stranico oziroma produktu sosednjih stranic in sinusa vmesnega kota:

$$S = av_a = ab \sin \alpha.$$

Št. točk

2

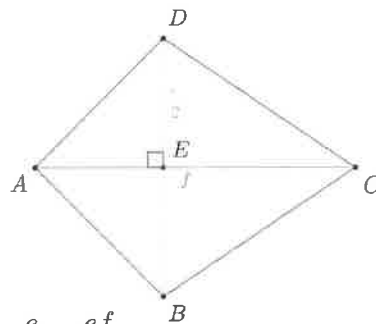
Navedite formulo za izračun ploščine deltoida in jo dokažite.

Naj bosta e in f dolžini diagonal deltoida $ABCD$. Ploščino deltoida izračunamo kot polovico produkta dolžin diagonal:

$$S = \frac{ef}{2}.$$

DOKAZ. Diagonalna f razdeli deltoid $ABCD$ na dva skladna trikotnika, katerih ploščino izračunamo kot:

$$S_{ABCD} = 2S_{ACD} = 2 \cdot \frac{|AC| \cdot v_{AC}}{2} = f \cdot \frac{e}{2} = \frac{ef}{2}.$$



Št. točk

2

Navedite formulo za izračun ploščine trapeza in jo dokažite.

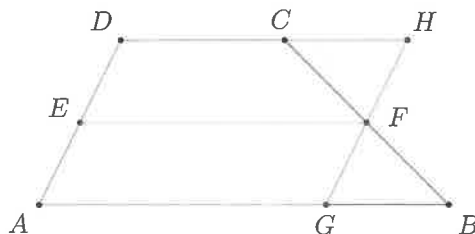
Naj bosta $s = \frac{a+c}{2}$ srednjica in v višina trapeza $ABCD$. Potem njegovo ploščino izračunamo kot produkt srednjice in višine:

$$S = s \cdot v = \frac{a+c}{2} \cdot v.$$

DOKAZ: Naj bo bosta E in F zaporedoma razpolovišči daljic AD in BC . Skozi točko F narišemo vzporednico k stranici AD ter presečišče te vzporednice in stranice AB označimo z G , presečišče te premice s premico CD pa s H . Tako konstruirani štirikotnik $AGHD$ je paralelogram. Ker sta trikotnika GBF in HCF skladna, je ploščina tega paralelograma enaka ploščini trapeza $ABCD$.

Ploščino tega paralelograma pa znamo izračunati. Osnovnica tega paralelograma je $s = \frac{a+c}{2}$, zato od tod po obrazcu za ploščino paralelograma sledi:

$$S = s \cdot v = \frac{a+c}{2} \cdot v.$$



37 Ploščine likov

Št. točk

1

Navedite formuli za izračun ploščine kvadrata in ploščine pravokotnika.

Ploščina kvadrata je enaka kvadratu dolžine njegove stranice a : $S = a^2$.

Ploščina pravokotnika je enaka produktu dolžin stranic pravokotnika a in b : $S = ab$.

Št. točk

2

Navedite formulo za izračun ploščine romba in jo dokažite.

Ploščina roma s stranico a , višino v in poljubnim notranjim kotom α :

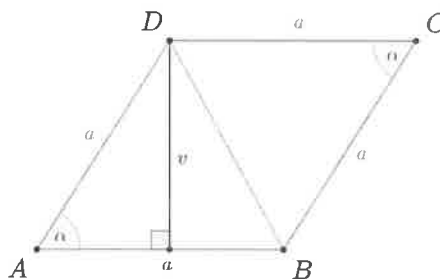
$$S = av = a^2 \sin \alpha.$$

DOKAZ. Romb $ABCD$ z diagonalo BD razdelimo na skladna trikotnika ABD in CDB . Ploščino trikotnika ABD (ki je enaka ploščini trikotnika CDB izrazimo kot polovico produkta dolžin stranic $|AB| = a$ in $|DA| = a$ ter sinusa vmesnega kota α :

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha.$$

Ploščina romba je enaka dvakratniku ploščine trikotnika ABD :

$$S = 2 \cdot S_{ABD} = a^2 \sin \alpha = av.$$



Formula velja za poljuben notranji kot; romb ima štiri notranje kote, med katerimi sta po dva skladna. Če je velikost enega kota α , je velikost drugega kota $180^\circ - \alpha$. Obrazec za ploščino ostane enak ne glede na izbiro notranjega kota, s katerim jo bomo izračunali, saj je $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$. \square

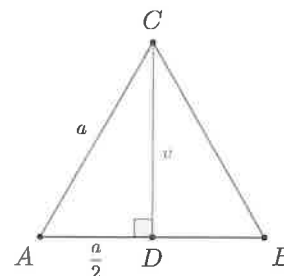
Št. točk

1

Izpeljite formulo za izračun višine enakostraničnega trikotnika.

Imejmo enakostranični trikotnik ABC s stranico a . Naj bo D nožišče višine na AB . Višino izračunamo s Pitagorovim izrekom. Velja:

$$v = |DC| = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$



Št. točk

2

Navedite formuli za izračun ploščine enakostraničnega in ploščine pravokotnega trikotnika.

Ploščina enakostraničnega trikotnika s stranico a je enaka: $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Ploščina pravokotnega trikotnika s katetama a in b je enaka: $S = \frac{ab}{2}$.

38 Krog

Št. točk

2

Navedite formuli za izračun ploščine in obsega kroga.

Ploščino in obseg kroga s polmerom r izračunamo s formulama:

$$S = \pi r^2 \quad \text{in} \quad o = 2\pi r.$$

Št. točk

2

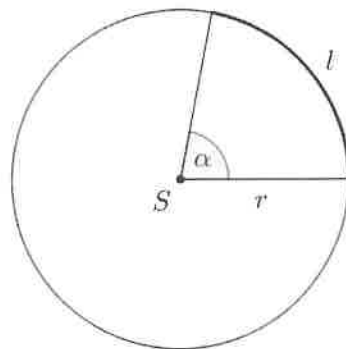
Povejte in izpeljite formulo za izračun dolžine krožnega loka.

Naj bo l dolžina krožnega loka, ki ga na krožnici s polmerom r določa kot α . Ker je dolžina krožnega loka, ki ga določa kot 360° , enaka $2\pi r$ (obseg), lahko sklepamo, da je dolžina krožnega loka l enaka

$$l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ},$$

pri čemer smo kot α izrazili v stopinjah. Če kot izrazimo v radianih, obrazec preide v

$$l = r\alpha.$$



Št. točk

2

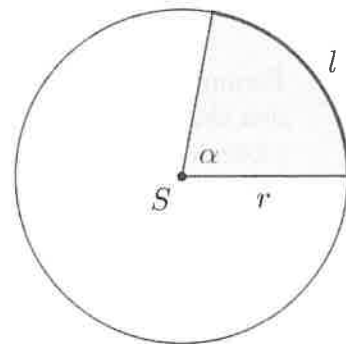
Povejte in izpeljite formulo za izračun ploščine krožnega izseka.

Naj bo S ploščina krožnega izseka, ki ga v krogu s polmerom r določa kot α . Ker je ploščina krožnega izseka, ki ga določa kot 360° , enaka πr^2 (ploščina kroga), lahko sklepamo, da je ploščina krožnega izseka S enaka

$$S = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ},$$

pri čemer smo kot α izrazili v stopinjah. Če kot izrazimo v radianih, obrazec preide v

$$S = \frac{r^2 \alpha}{2} = \frac{rl}{2}.$$



39 Prizma

Št. točk

1

Definirajte prizmo.

Prizma je geometrijsko telo, ki je spodaj in zgoraj omejeno z dvema skladnima n -kotnikoma, med katerima je razpetih n paralelogramov.

Kdaj je prizma

Št. točk

1

– **enakoroba?**

Prizma je **enakoroba**, če ima vse robove enako dolge.

Št. točk

1

– **n -strana?**

Prizma, ki ima za osnovno ploskev **n -kotnik**, je n -strana prizma.

Št. točk

1

– **pravilna?**

Prizma je **pokončna**, če so stanski robovi pravokotni na osnovno ploskev oziroma če so stranske ploske pravokotniki oziroma če je višina enaka stranskemu robu.

Prizma je **pravilna**, če je pokončna in če je njena osnovna ploskev pravilni n -kotnik.

Št. točk

1

Navedite formuli za izračun prostornine in površine pokončne prizme.

Površina pokončne prizme P je enaka vsoti dvakratnika ploščine osnovne ploskve O in plašča pl prizme, prostornina V pa je enaka produktu ploščine osnovne ploskve O in višine prizme v :

$$V = O \cdot v, \quad P = 2O + pl = 2O + o \cdot v.$$

Št. točk

1

Izpeljite formulo za izračun prostornine pravilne enakorobe šeststrane prizme z robom a .

Osnovna ploskev pravilne šeststrane prizme z robom a sestoji iz 6 enakostraničnih trikotnikov s stranico a . Ploščina osnovne ploskve pravilne šeststrane prizme je zato

$$O = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}.$$

Če je prizma enakoroba, velja $a = v$. Prostornina je tedaj

$$V = O \cdot v = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 v = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^3.$$

40 Valj

Št. točk

1

Definirajte pokončni valj.

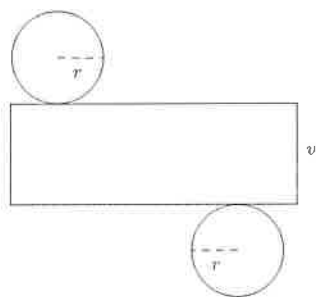
Valj je geometrijsko telo, ki je zgoraj in spodaj omejeno z dvema skladnima in vzporednima krogoma, med katera je razpet najmanjši možen plašč. Ta dva kroga sta osnovni ploskvi valja. Valj je pokončen, če so stranice pravokotne na osnovno ploskev oziroma če sta os in višina vzporedni.

Št. točk

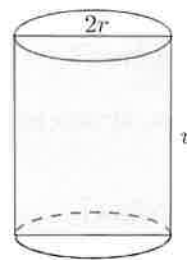
1

Skicirajte mrežo valja.

Mreža valja je pravokotnik z dvema skladnima krogoma.



Mreža valja



Osni presek valja

Št. točk

1

Kaj je osni presek valja?

Osni presek valja je presek valja z ravnino, ki poteka skozi njegovo os. Vsak osni presek valja je tudi njegov značilni osni presek. Osni presek pokončnega valja je pravokotnik s stranicama $2r$ in v .

Št. točk

1

Navedite formuli za izračun površine in prostornine pokončnega valja.

Površina pokončnega valja P je enaka vsoti dvakratnika ploščine osnovne ploskve O in plašča pl valja, prostornina V pa je enaka produktu ploščine osnovne ploskve O in višine valja v :

$$P = 2O + pl = 2\pi r(r + v), \quad V = O \cdot v = \pi r^2 v.$$

Št. točk

1

Izpeljite formulo za izračun površine valja.

Pri izpeljavi formule za izračun površine valja izhajamo iz formule $P = 2O + pl$ in izrazov za ploščino osnove ploskve (kroga s polmerom r) $O = \pi r^2$ in ploščino plašča $pl = 2\pi r \cdot v$. Od tod sledi

$$P = 2O + pl = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r(r + v).$$

Št. točk

1

Izrazite prostornino enakostraničnega valja s polmerom osnovne ploskve r .

Izhajamo iz osnovne formule za prostornino valja: $V = O \cdot v$. Ploščina osnovne ploskve je $O = \pi r^2$, višina enakostraničnega valja pa je $v = 2r$. Od tod sledi

$$V = O \cdot v = \pi r^2 \cdot v = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3.$$

41 Piramida

Št. točk

1

Definirajte piramido.

Piramida je geometrijsko telo, ki je spodaj omejeno z n -kotnikom, ob straneh pa z n trikotniki, ki se z eno stranico stikajo z robom osnovne ploskve (to je prej omenjeni n -kotnik). Vsi ti trikotniki pa se stikajo v točki, ki leži izven ravnine, ki jo določa osnovna ploskev. To točko imenujemo **vrh** piramide, vsi ti trikotniki skupaj pa tvorijo plašč piramide.

Kdaj je piramida

Št. točk

1

– **enakoroba?**

Piramida je **enakoroba**, če so vsi njeni robovi enako dolgi.

Št. točk

1

– **n -strana?**

Piramida je **n -strana**, če je osnovna ploskev piramide n -kotnik.

Št. točk

1

– **pravilna?**

Piramida je **pokončna**, če njena višina leži na njeni osi oziroma če so vsi stranski robovi skladni oziroma če so stranske ploske enakokraki trikotniki oziroma če vrh leži neposredno nad središčem osnovni ploskvi očrtanega kroga.

Piramida je **pravilna**, če je njena osnovna ploskev pravilni n -kotnik in je pokončna.

Št. točk

1

Navedite formuli za izračun površine in prostornine pravilne piramide.

Površina pravilne piramide P je enaka vsoti ploščine osnovne ploskve O , ki je pravilni n -kotnik s stranico a , in plašča pl , ki je vsota enakokrakih trikotnikov z osnovnico a in stranskim robom s . Prostornina V pa je enaka tretjini produkta ploščine osnovne ploskve O in višine piramide v :

$$P = O + pl, \quad V = \frac{1}{3} O \cdot v$$

Št. točk

1

Izrazite prostornino pravilne enakorobe tristrane piramide z robom a .

Izhajamo iz osnovne formule za prostornino piramide, pri čemer upoštevamo, da je tako osnovna kot stranska ploskev piramide enakostranični trikotnik:

$$V = \frac{1}{3} O \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}.$$

Pri izpeljavi prostornine smo upoštevali, da višinska točka osnovne ploskve razdeli višino osnovne ploskve v razmerju 2 : 1, in da je višina piramide enaka $v = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Do tega rezultata pridemo s Pitagorovim izrekom:

$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

42 Stožec

Št. točk

1

Definirajte pokončni stožec.

Stožec je geometrijsko telo, ki je spodaj omejeno s krogom, omejuje pa ga še najmanjši možni plašč, ki se ovije okrog tega kroga in točke, ki leži izven ravnine kroga. Krog je **osnovna ploskev** stožca, točka pa njegov **vrh**.

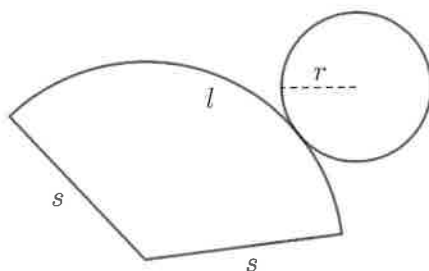
Stožec je **pokončen**, če se njegov vrh pravokotno projicira na središče osnovne ploskve.

Št. točk

1

Skicirajte mrežo stožca.

Mreža stožca je krožni izsek in krog.

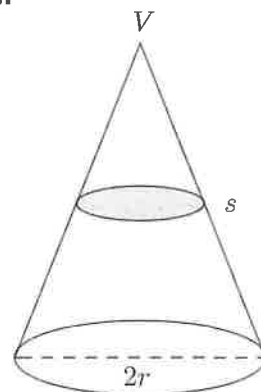


Št. točk

1

Opišite presek stožca z ravnino, vzporedno osnovni ploskvi.

Presek stožca z ravnino, vzporedno osnovni ploskvi, je **krog** s polmerom, manjšim ali enakim polmeru osnovne ploskve.

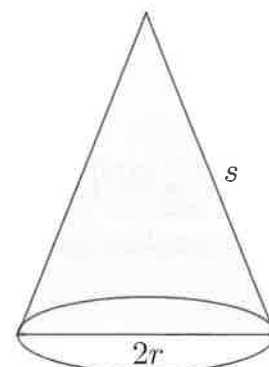


Št. točk

1

Opišite presek stožca z ravnino, ki vsebuje os stožca.

Presek stožca z ravnino, ki vsebuje os stožca, je **trikotnik**. V pokončnem stožcu velja, da je ta presek enakokraki trikotnik s stranicami $2r$, s in s .



Št. točk

1

Navedite formuli za površino in prostornino stožca.

Površina stožca P je enaka vsoti ploščine osnovne ploskve O , ki je krog s polmerom r , in plašča pl , ki ga v ravnino lahko raztegnemo v krožni izsek. Prostornina V pa je enaka tretjini produkta ploščine osnovne ploskve O in višine stožca v :

$$P = O + pl = \pi r(r + s), \quad V = \frac{1}{3} O \cdot v = \frac{1}{3} \pi r^2 v.$$

Št. točk

1

Izrazite površino enakostraničnega stožca s polmerom r .

Izhajamo iz formule za površino stožca $P = \pi r(r + s)$, pri čemer upoštevamo, da v enakostraničnem stožcu velja $s = 2r$.

$$P = \pi r \cdot (r + s) = \pi r \cdot 3r = 3\pi r^2.$$

43 Vektorji

Št. točk

1

Kaj je vektor?

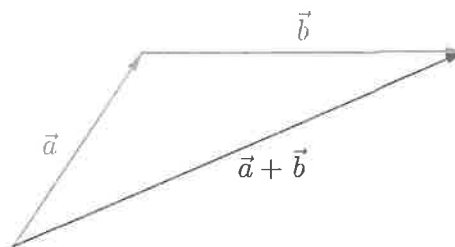
Vektor je količina, določena s smerjo, usmerjenostjo in dolžino. Ponazorimo ga z vzporedno daljico.

Št. točk

1

Definirajte seštevanje vektorjev.

Vektorja \vec{a} in \vec{b} seštejemo tako, da vektor \vec{b} vzporedno premaknemo tako, da je njegov začetek v koncu vektorja \vec{a} . Vsota vektorjev $\vec{a} + \vec{b}$ je vektor z začetkom v začetku vektorja \vec{a} in koncem v koncu vektorja \vec{b} .



Št. točk

1

Definirajte ničelni vektor in nasprotni vektor danega vektorja.

Ničelni vektor (oznaka: $\vec{0}$) je vektor z dolžino 0. Nima smeri in usmerjenosti.

Nasprotni vektor danega vektorja \vec{a} je tak vektor $-\vec{a}$, da je $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Št. točk

2

Pojasnite vsaj dve lastnosti seštevanja vektorjev in vsaj eno izmed njih dokažite.

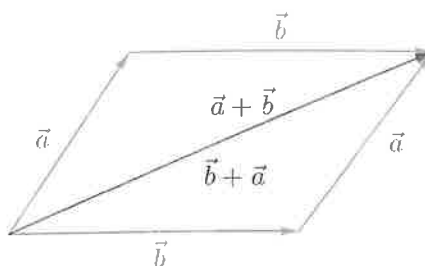
Lastnosti seštevanja vektorjev:

- a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ komutativnost seštevanja,
b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ asociativnost seštevanja,
c) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ vektor $\vec{0}$ je nevtralni element za seštevanje.

DOKAZ.

- a) Če je eden izmed vektorjev ničelni, komutativnost velja: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Če vektorja nimata iste smeri, ju lahko seštejemo po paralelogramskem pravilu (slika spodaj).



Če imata vektorja isto smer, dobimo vektor z isto smerjo in usmerjenostjo kot \vec{a} in \vec{b} , dolžina vsote pa je vsota dolžin vektorjev \vec{a} in \vec{b} . To je neodvisno od vrstnega reda seštevanja:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

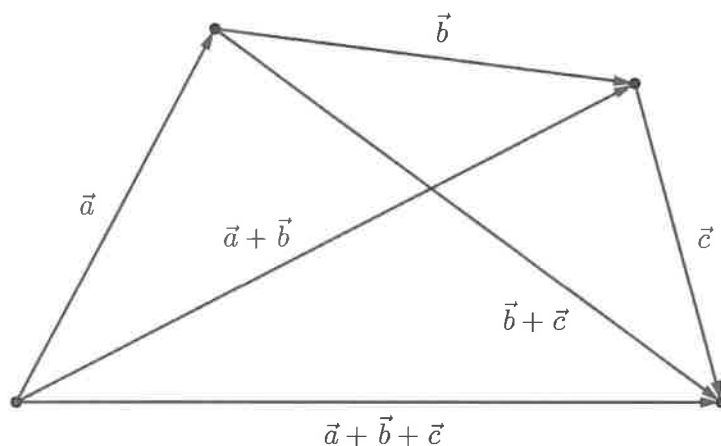
Če imata vektorja nasprotno usmerjenost, dobimo vektor z isto smerjo kot \vec{a} in \vec{b} . Če imata vektorja usmerjenost je enaka usmerjenosti daljšega vektorja, dolžina pa je enaka razliki dolžin daljšega in krajšega vektorja. To je neodvisno od vrstnega reda seštevanja:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

- b) Če je eden od vektorjev enak $\vec{0}$, to očitno velja, saj potem v vsoti nastopata le še dva vektorja.

Če noben od vektorjev ni ničelni, lahko s slike spodaj razberemo, da res velja

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$



- c) Po definiciji začetek vektorja $\vec{0}$ postavimo na konec vektorja \vec{a} . Ponovo po definiciji je njuna vsota vektor, ki se začne v začetku vektorja \vec{a} in konča v koncu vektorja $\vec{0}$. Ker pa je začetek in konec vektorja $\vec{0}$ ista točka, je njuna vsota kar vektor \vec{a} . \square

44 Vektorji

Št. točk

1

Definirajte množenje vektorjev s skalarji.

Za vektor \vec{a} in realno število $n \in \mathbb{R}$ je $n\vec{a}$ vektor, definiran na naslednji način:

- a) če je $\vec{a} = \vec{0}$ ali $n = 0$, je $n\vec{a} = \vec{0}$.
- b) če je $\vec{a} \neq \vec{0}$ in $n \neq 0$, je $n\vec{a}$ vektor, za katerega velja:
- njegova dolžina je $|n| \cdot |\vec{a}|$,
 - ima enako smer kot vektor \vec{a} ,
 - za $n > 0$ je enako usmerjen kot vektor \vec{a} , za $n < 0$ pa nasprotno usmerjen kot vektor \vec{a} .

Št. točk

3

Povejte vsaj dve lastnosti množenja vektorjev s skalarji in vsaj eno izmed njih dokažite.

Lastnosti množenja vektorjev s skalarji:

- a) $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$ asociativnost v številskem faktorju,
- b) $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$ distributivnost v številskem faktorju,
- c) $n(\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}$ distributivnost v vektorskem faktorju.

DOKAZ. Vektorja sta enaka, če imata enako smer, usmerjenost in velikost.

a) Ločimo več primerov:

- Če je $m = 0, n = 0$ ali $\vec{a} = \vec{0}$, potem je $m(n\vec{a}) = \vec{0} = (mn)\vec{a}$.
- Obravnavajmo primer, ko je $m \neq 0, n \neq 0$ in $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Smer vektorja $m(n\vec{a})$ je enaka smeri vektorja \vec{a} . Usmerjenost se ohrani, če sta m in n enakih predznakov. Če pa sta m in n različnih predznakov, se usmerjenost spremeni. Velikost je enaka

$$|m(n\vec{a})| = |m| \cdot |n\vec{a}| = |m| \cdot |n| \cdot |\vec{a}| = |mn| \cdot |\vec{a}|,$$

pri čemer smo v zadnjem koraku upoštevali lastnost absolutne vrednosti realnega števila.

Poglejmo zdaj smer, usmerjenost in velikost vektorja $(mn)\vec{a}$.

Vektor $(mn)\vec{a}$ ima enako smer kot vektor \vec{a} .

Če je $mn > 0$ (če sta m in n enako predznačena), je usmerjenost enaka kot pri vektorju \vec{a} , če pa je $mn < 0$ (če sta m in n različno predznačena), je usmerjenost nasprotna kot pri vektorju \vec{a} .

Za velikost velja

$$|(mn) \cdot \vec{a}| = |mn| \cdot |\vec{a}|.$$

Vektorja se ujemata v smeri, usmerjenosti in velikosti, zato je $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$.

□

b) Naj bo brez škode za splošnost $|m| \geq |n|$.

Vektor $(m+n)\vec{a}$ ima smer enako kot vektor \vec{a} . Usmerjenost tega vektorja je enaka kot pri \vec{a} , če je $m+n > 0$, in nasprotna, če je $m+n < 0$. Velikost tega vektorja je $|(m+n)\vec{a}| = |m+n| \cdot |\vec{a}|$.

Vektor $m\vec{a} + n\vec{a}$ je vsota dveh vektorjev z isto smerjo kot vektor \vec{a} , zato ima tudi vsota smer vektorja \vec{a} .

Pri obravnavi usmerjenosti ločimo več primerov:

- če je $m > 0$ in $n > 0$, je $m+n > 0$ in ima vektor $m\vec{a} + n\vec{a}$ enako usmerjenost kot \vec{a} ,
- če je $m < 0$ in $n < 0$, je $m+n < 0$ in ima vektor $m\vec{a} + n\vec{a}$ nasprotno usmerjenost kot \vec{a} ,
- če je $m > 0$ in $n < 0$, je $m+n > 0$ in ima $m\vec{a} + n\vec{a}$ enako usmerjenost kot \vec{a} ,
- če je $m < 0$ in $n > 0$, je glede na zgornjo predpostavko $m+n < 0$ in ima vektor $m\vec{a} + n\vec{a}$ nasprotno usmerjenost kot \vec{a} .

Od tod lahko sklepamo, da ima vektor $m\vec{a} + n\vec{a}$ za $m+n > 0$ enako usmerjenost kot \vec{a} , sicer pa nasprotno.

Poglejmo še velikost vektorja $m\vec{a} + n\vec{a}$ v posameznih primerih:

- če je $m > 0$ in $n > 0$, velja

$$|m\vec{a} + n\vec{a}| = |m\vec{a}| + |n\vec{a}| = |m| \cdot |\vec{a}| + |n| \cdot |\vec{a}| = m|\vec{a}| + n|\vec{a}| = (m+n) \cdot |\vec{a}| = |(m+n) \cdot \vec{a}|.$$

- če je $m < 0$ in $n < 0$, velja

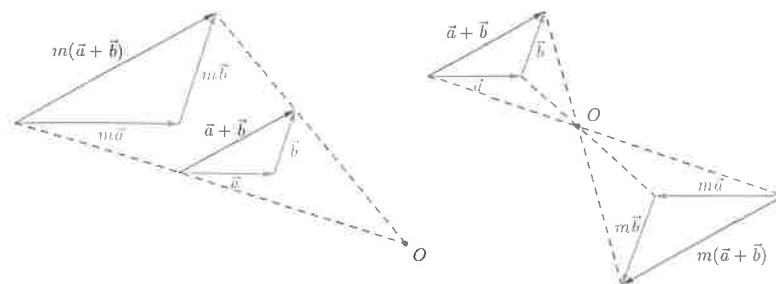
$$|m\vec{a} + n\vec{a}| = |m| \cdot |\vec{a}| + |n| \cdot |\vec{a}| = -m|\vec{a}| - n|\vec{a}| = |-m-n| \cdot |\vec{a}| = |(m+n) \cdot \vec{a}|.$$

- če je $m > 0$ in $n < 0$, velja

$$|m\vec{a} + n\vec{a}| = ||m\vec{a}| - |n\vec{a}|| = |m|\vec{a}| + n|\vec{a}|| = |(m+n) \cdot \vec{a}| = |(m+n) \cdot \vec{a}|.$$

Ker se vektorja $(m+n)\vec{a}$ in $m\vec{a} + n\vec{a}$ ujemata v vseh treh količinah, sta enaka. \square

c) Pomagamo si lahko s središčnim raztegom s faktorjem m . Ločimo primeri za $m > 0$ in $m < 0$. V obeh primerih zaključimo, da je $m\vec{a} + m\vec{b} = m(\vec{a} + \vec{b})$. \square



Št. točk

1

Kdaj sta vektorja kolinearna?

Naj bo k skalar in naj velja $k \neq 0$. Neničelna vektorja \vec{a} in \vec{b} sta **kolinearna** natanko tedaj, ko je $\vec{a} = k\vec{b}$.

Št. točk

1

Definirajte enotski vektor.

Enotski vektor \vec{e} je vektor dolžine 1 s poljubno smerjo in usmerjenostjo.

45 Vektorji

Št. točk

1

Definirajte standardno ortonormirano bazo v prostoru \mathbb{R}^3 .

Standardna ortonormirana baza sestoji iz baznih vektorjev \vec{i} , \vec{j} in \vec{k} , za katere velja, da so enotski (dolžine 1) in pravokotni med seboj. Vektor \vec{i} leži na osi x , vektor \vec{j} na osi y , vektor \vec{k} pa na osi z .

Za bazne vektorje velja

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1,$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0.$$

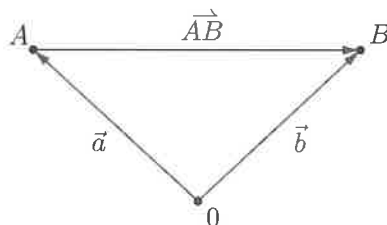
Št. točk

2

Naj bosta A in B točki v prostoru \mathbb{R}^3 . Izrazite vektor \overrightarrow{AB} s koordinatami točk A in B in odgovor utemeljite.

Naj bosta \vec{a} in \vec{b} krajevna vektorja točk $A(a_1, a_2, a_3)$ in $B(b_1, b_2, b_3)$ v prostoru. Izrazimo

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$



Št. točk

3

Izrazite koordinate razpolovišča S daljice AB s koordinatami krajišč točk A in B . Formulo izpeljite.

Naj bosta $A(a_1, a_2, a_3)$ in $B(b_1, b_2, b_3)$ točki v prostoru. Potem je razpolovišče daljice AB točka $S\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$.

Označimo $\vec{r}_A = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{r}_B = (b_1, b_2, b_3)$. Potem velja

$$\begin{aligned} \vec{r}_S &= \vec{r}_A + \overrightarrow{AS} = \vec{r}_A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{r}_A + \frac{1}{2}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \frac{1}{2}\vec{r}_A + \frac{1}{2}\vec{r}_B = \\ &= \frac{1}{2}(a_1, a_2, a_3) + \frac{1}{2}(b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{2}\right) + \left(\frac{b_1}{2}, \frac{b_2}{2}, \frac{b_3}{2}\right) = \\ &= \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right). \end{aligned}$$

46 Sklarani produkt

Št. točk

1

Kako izračunamo skalarni produkt dveh vektorjev, če poznamo njuni dolžini in kot med njima?

Skalarni produkt vektorjev \vec{a} in \vec{b} je produkt dolžin vektorjev \vec{a} in \vec{b} ter kosinusa kota φ med njima:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

kjer je $\varphi \in [0^\circ, 180^\circ]$.

Št. točk

3

Naštejte vsaj dve lastnosti skalarnega produkta in vsaj eno izmed njih dokažite.

Za poljubne vektorje \vec{a} , \vec{b} in \vec{c} ter skalar m velja:

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ komutativnost,
b) $\vec{a} \cdot (m\vec{b}) = (m\vec{a}) \cdot \vec{b} = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$ homogenost,
c) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ distributivnost množenja glede na seštevanje,
d) $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ skalarni produkt vektorja s samim seboj je nenegativno realno število.

DOKAZ.

- a) Pri dokazu komutativnosti uporabimo komutativnost realnih števil in sodost funkcije kosinus:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(-\varphi) = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

- b) Pokažimo, da je $(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Naj bo $m \geq 0$. Če je φ kot med vektorjema \vec{a} in \vec{b} , potem je kot med vektorjema $m\vec{a}$ in \vec{b} prav tako enak φ . Tako imamo

$$(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = |m\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = |m \cdot \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = m \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = m(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Naj bo $m < 0$. Potem je kot med vektorjema $m\vec{a}$ in \vec{b} enak $180^\circ - \varphi$. Sledi:

$$\begin{aligned} (m\vec{a}) \cdot \vec{b} &= |m\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(180^\circ - \varphi) = -m|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|(-\cos \varphi) = m|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \\ &= m(\vec{a} \cdot \vec{b}). \end{aligned}$$

Podobno pokažemo, da je $\vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

- c) Dokazu distributivnosti se bomo v priročniku izognili in ga vsem bodočim kandidatom na maturi prijazno odsvetujemo.
d) Kot med vektorjema \vec{a} in \vec{a} je 0° . Potem velja

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2 \geq 0.$$

□

Št. točk

1

Kako s skalarnim produktom ugotovimo, ali sta dana vektorja pravokotna?

Dana vektorja sta pravokotna natanko tedaj, ko je njun skalarni produkt enak 0.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Št. točk

1

Kako s skalarnim produktom ugotovimo, ali sta dana vektorja vzporedna?

Dana vektorja sta vzporedna natanko tedaj, ko je njun skalarni produkt enak produktu njunih dolžin (če sta vektorja enako usmerjena) ali nasprotni vrednosti produkta njunih dolžin (če sta vektorja nasprotno usmerjena).

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

47 Skalarni produkt v standardni ortonormirani bazi

Št. točk

2

Kako izračunamo skalarni produkt dveh vektorjev v standardni ortonormirani bazi? Odgovor utemeljite.

Naj bosta $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ poljubna vektorja v standardni ortonormirani bazi. Potem skalarni produkt vektorjev \vec{a} in \vec{b} izračunamo kot

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

DOKAZ.

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) \\ &= a_1 b_1 \vec{i} \cdot \vec{i} + a_1 b_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + a_1 b_3 \vec{i} \cdot \vec{k} + a_2 b_1 \vec{j} \cdot \vec{i} + a_2 b_2 \vec{j} \cdot \vec{j} + \\ &+ a_2 b_3 \vec{j} \cdot \vec{k} + a_3 b_1 \vec{k} \cdot \vec{i} + a_3 b_2 \vec{k} \cdot \vec{j} + a_3 b_3 \vec{k} \cdot \vec{k} \\ &= a_1 b_1 |\vec{i}|^2 + a_2 b_2 |\vec{j}|^2 + a_3 b_3 |\vec{k}|^2 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\end{aligned}$$

V izpeljavi smo upoštevali distributivnost in homogenost skalarnega produkta ter lastnosti skalarnega produkta enotskih vektorjev.

Št. točk

2

Kako izračunamo dolžino vektorja v standardni ortonormirani bazi? Odgovor utemeljite.

Naj bo $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ poljuben vektor v standardni ortonormirani bazi. Potem je

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

DOKAZ.

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (a_1, a_2, a_3) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

pri čemer smo upoštevali pri prejšnjem delu vprašanja utemeljeno pravilo za izračun skalarnega produkta dveh vektorjev v standardni ortonormirani bazi. Od tod sledi

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

□

Št. točk

1

Kako izračunamo kot med vektorjema v standardni ortonormirani bazi?

Kot med vektorjema $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ v standardni ortonormirani bazi izračunamo tako, da najprej izračunamo njun skalarni produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ter njuni dolžini $|\vec{a}|$ in $|\vec{b}|$. Kosinus kota med vektorjema izrazimo iz definicije skalarnega produkta:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

St. točk

1

Ponazorite izračun kota med vektorjema s primerom.

Imejmo vektorja $\vec{a} = (2, 2, 2)$ in $\vec{b} = (1, 2, 2)$. Izračunamo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{10}{2\sqrt{3} \cdot 3} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$$

$$\therefore \varphi \doteq 15,79^\circ.$$

48 Koordinatni sistem v ravnini

Št. točk

1

Definirajte pravokotni koordinatni sistem v ravnini \mathbb{R}^2 .

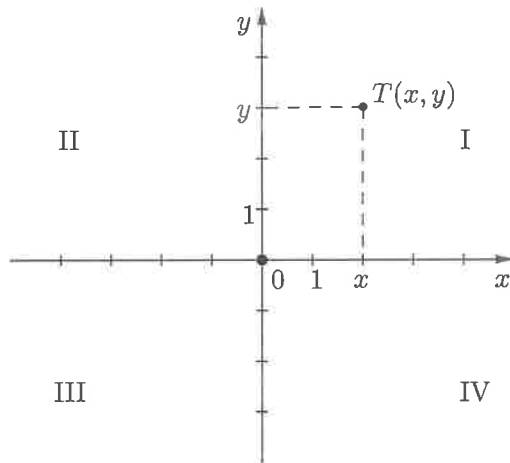
Ravnino opremimo z dvema pravokotnima številskima premicama, ki se sekata v koordinatnem izhodišču. Vsaka od premic predstavlja množico \mathbb{R} (2 realni osi). Premici imenujemo koordinatni osi – vodoravna os je os x ali abscisna os, navpična os je os y ali ordinatna os.

Koordinatno izhodišče razdeli koordinatni osi na negativen in pozitiven poltrak. Lego poljubne točke v ravnini lahko opišemo z dvema številoma, s koordinatama x in y : koordinata x nam pove, za koliko enot je točka oddaljena od osi y vključno s predznakom (če je x pozitiven, je toliko desno od osi y , če je x negativen, pa levo), koordinata y pa nam pove, za koliko enot je točka oddaljena od osi x , vključno s predznakom (če je y pozitiven je toliko nad osjo x , če je negativen, pa pod).

Lego točko zapišemo z urejenim parom realnih števil $A(x, y)$.

Vse točke v ravnini opišemo kot $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, kjer uvedemo oznako $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Vse točke v koordinatnem sistemu so torej vsi urejeni pari realnih števil.

Koordinatni osi razdelita koordinatni sistem na štiri kvadrante: I. kvadrant, II. kvadrant, III. kvadrant in IV. kvadrant.



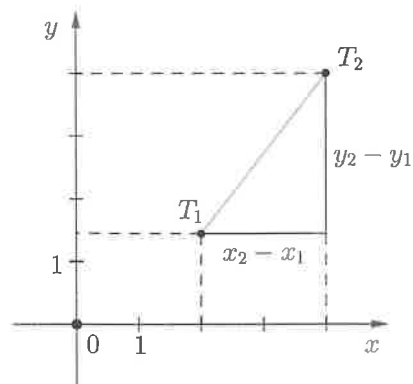
Št. točk

2

Izpeljite formulo za računanje razdalje med dvema točkama.

Imejmo točki v ravnini $A(x_1, y_1)$ in $B(x_2, y_2)$. Razdaljo med točkama izpeljemo s pomočjo Pitagorovega izreka:

$$d(A, B)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Št. točk

2

Povejte koordinati razpolovišča daljice z danima krajiščema. Odgovor utemeljite.

Naj bosta $A(x_1, y_1)$ in $B(x_2, y_2)$ krajišči dane daljice. Potem je razpolovišče dane daljice točka

$$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Koordinati razpolovišča S sta torej aritmetični sredini koordinat točk A in B .

DOKAZ. Preveriti moramo dvoje: S je enako oddaljena od A in B ter S leži na daljici AB oziroma, da so točke A, B in S kolinearne.

S formulo za oddaljenost med točkama v ravnini izrazimo oddaljenost med točkama S in A ter S in B :

$$\begin{aligned} d(A, S) &= \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y_1\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2 - 2x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2 - 2y_1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(S, B) &= \sqrt{\left(x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2x_2 - x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2y_2 - y_1 - y_2}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)^2}, \end{aligned}$$

pri čemer smo v zadnji vrstici upoštevali, da je $(y_1 - y_2)^2 = (y_2 - y_1)^2$.

Pokazali smo, da je $d(A, S) = d(S, B)$.

Kolinearnost preverimo tako, da izračunamo ploščino trikotnika ABS :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} - x_1 & \frac{y_1 + y_2}{2} - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ \frac{x_2 - x_1}{2} & \frac{y_2 - y_1}{2} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \left((x_2 - x_1) \cdot \frac{y_2 - y_1}{2} - \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot (y_2 - y_1) \right) = 0. \end{aligned}$$

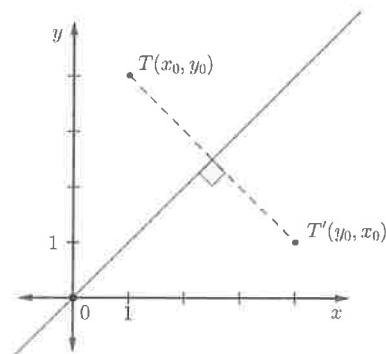
Ploščina trikotnika ABS je enaka 0, zato so točke A, B in S res kolinearne, kar zaključuje dokaz. \square

Št. točk

1

Točko $T(x_0, y_0)$ prezrcalite čez premico z enačbo $y = x$. Povejte koordinati tako dobljene točke.

Koordinati nove točke sta $T'(y_0, x_0)$.



49 Funkcije

Št. točk

1

Definirajte pojem funkcije (preslikave) iz množice \mathcal{A} v množico \mathcal{B} .

Funkcija $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ je predpis, ki vsakemu elementu množice \mathcal{A} (domena) priredi natanko en element iz množice \mathcal{B} (kodomena).

Št. točk

3

Kdaj je funkcija injektivna, kdaj surjektivna in kdaj bijektivna?

Funkcija $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ je **injektivna**, če je vsak element iz množice \mathcal{B} slika največ enega elementa iz množice \mathcal{A} .

Z drugimi besedami, funkcija je injektivna, če se dva različna elementa iz \mathcal{A} preslika v različna elementa iz \mathcal{B} . Za poljubna $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$ velja

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Funkcija $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ je **surjektivna**, če je vsak element iz množice \mathcal{B} slika vsaj enega elementa iz množice \mathcal{A} .

Z drugimi besedami, funkcija je surjektivna, če za vsak $y \in \mathcal{B}$ obstaja $x \in \mathcal{A}$, da je $f(x) = y$. Funkcija je surjektivna, če je $Z_f = \mathcal{B}$.

Funkcija $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ je **bijektivna**, če je hkrati injektivna in surjektivna.

Z drugimi besedami, funkcija je bijektivna, če je vsak element iz \mathcal{B} slika natanko enega elementa iz \mathcal{A} .

Št. točk

1

Skicirajte graf ali povejte predpis funkcije, ki ni surjektivna.

Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = 2^x$ ni surjektivna.

Št. točk

1

Skicirajte graf ali povejte predpis funkcije, ki ni injektivna.

Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = x^2$ ni injektivna.

50 Lastnosti funkcij

Št. točk

2

Kdaj je funkcija na intervalu naraščajoča in kdaj padajoča?

Funkcija f je **naraščajoča** na intervalu I , če za poljubna $x_1, x_2 \in I$ velja

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Funkcija f je **padajoča** na intervalu I , če za poljubna $x_1, x_2 \in I$ velja:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Št. točk

1

Skicirajte graf ali povejte predpis funkcije, ki ni niti naraščajoča niti padajoča.

Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = \sin x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ ni niti naraščajoča niti padajoča.

Poudarimo naj, da je konstantna funkcija po definiciji na poljubnem intervalu tako naraščajoča kot tudi padajoča, zato to ni pravilen odgovor na vprašanje.

Št. točk

1

Kdaj je funkcija f omejena?

Funkcija f je **omejena**, če ima tako zgornjo kot spodnjo mejo.

Število $M \in \mathbb{R}$ je **zgornja meja** funkcije f , če za vsak $x \in D_f$ velja $f(x) \leq M$.

Število $m \in \mathbb{R}$ je **spodnja meja** funkcije f , če za vsak $x \in D_f$ velja $f(x) \geq m$.

Št. točk

1

Definirajte natančno zgornjo mejo in natančno spodnjo mejo omejene funkcije f .

Število $M \in \mathbb{R}$ je **natančna zgornja meja** funkcije f , če je njena zgornja meja in če nobeno manjše število ni zgornja meja.

Število $m \in \mathbb{R}$ je **natančna spodnja meja** funkcije f , če je njena spodnja meja in če nobeno večje število ni spodnja meja.

51 Lastnosti funkcij

Št. točk

2

Kdaj je funkcija f liha in kdaj soda?

Funkcija f je **liha**, če za vsak $x \in \mathcal{D}_f$ velja

$$f(-x) = -f(x).$$

Funkcija f je **soda**, če za vsak $x \in \mathcal{D}_f$ velja

$$f(-x) = f(x).$$

Št. točk

1

Kako iz grafa funkcije f ugotovimo, ali je funkcija f soda oziroma liha?

Funkcija f je liha, če je njen graf simetričen glede na koordinatno izhodišče.

Funkcija f je soda, če je njen graf simetričen glede na os y .

Št. točk

1

Skicirajte graf ali povejte predpis funkcije, ki je hkrati soda in liha.

Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = 0$ je primer hkrati sode in lihe funkcije.

Št. točk

1

Skicirajte graf ali povejte predpis neomejene padajoče lihe funkcije.

Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = -x$ je primer neomejene padajoče lihe funkcije.

Št. točk

1

Skicirajte graf ali povejte predpis sode funkcije, ki ima zalogo vrednosti

$Z_f = [2, 4]$.

Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = \cos x + 3$ je primer sode funkcije, ki ima zalogo vrednosti enako $Z_f = [2, 4]$.

52 Linearna funkcija

Št. točk

2

Definirajte linearno funkcijo in povejte, kaj je njen graf.

Linearna funkcija je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = kx + n$, kjer sta $k, n \in \mathbb{R}$.

Graf linearne funkcije je **premica**.

Št. točk

2

V odvisnosti od diferenčnega količnika k preučite naraščanje in padanje linearne funkcije f .

Pri vrednostih diferenčnih količnikov $k \in [0, \infty)$ je linearna funkcija naraščajoča.

Pri vrednostih diferenčnih količnikov $k \in (-\infty, 0]$ je linearna funkcija padajoča.

Konstantna funkcija je po definiciji tako naraščajoča kot padajoča.

Št. točk

1

Za koliko se spremeni vrednost linearne funkcije f , če vrednost neodvisne spremenljivke povečamo za a ?

Imejmo linearno funkcijo f s predpisom $f(x) = kx + n$.

Naj bo vrednost linearne funkcije pri nekem $x_0 \in \mathbb{R}$ enaka

$$f(x_0) = kx_0 + n.$$

Če vrednost neodvisne spremenljivke povečamo za a , je vrednost funkcije enaka

$$f(x_0 + a) = k(x_0 + a) + n.$$

Vrednost linearne funkcije se spremeni za

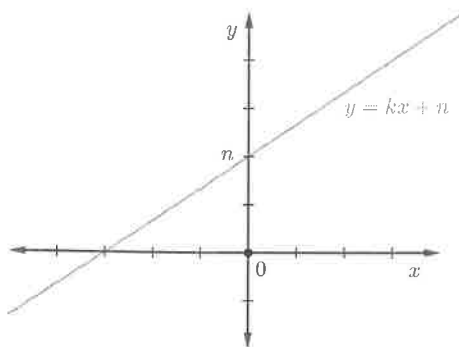
$$f(x_0 + a) - f(x_0) = k(x_0 + a) + n - kx_0 - n = ka.$$

Št. točk

1

Naj bo f strogo naraščajoča linearna funkcija s pozitivno začetno vrednostjo. Kakšen je predznak ničle funkcije f ?

Predznak ničle funkcije f je negativen.



53 Enačba premice

Št. točk

2

Kaj je eksplicitna oblika enačbe premice? Enačbe katerih premic lahko zapišemo v tej obliki?

Eksplicitna oblika enačbe premice je enačba oblike $y = kx + n$, kjer je $k \in \mathbb{R}$ smerni koeficient premice, $n \in \mathbb{R}$ pa odsek, ki ga premica odreže od osi y .

V tej obliki lahko zapišemo vsako premico razen premic, ki so vzporedne osi y .

Št. točk

2

Kaj je implicitna oblika enačbe premice. Enačbe katerih premic lahko zapišemo v tej obliki?

Implicitna oblika enačbe premice je enačba oblike $ax + by + c = 0$, kjer so a, b in c realna števila, ki niso vsa hkrati enaka 0.

V tej obliki lahko zapišemo enačbo vsake premice.

Št. točk

2

Naj ima premica v ravnini enačbo $ax + by + c = 0$. Kaj mora veljati za realna števila a, b in c , da lahko enačbo premice zapišemo v odsekovni obliki?

Veljati mora $a \neq 0$, $b \neq 0$ in $c \neq 0$.

54 Premice v ravnini

Št. točk

2

Definirajte naklonski kot premice in razložite zvezo med naklonskim kotom in smernim koeficientom dane premice (če ta obstaja).

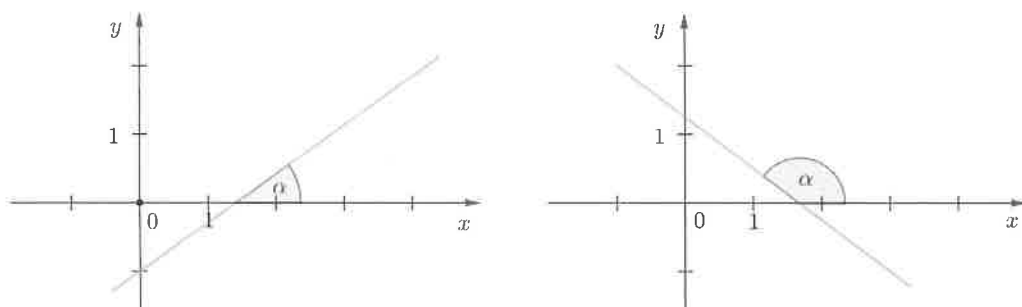
Naklonski kot premice α je kot med pozitivnim poltrakom osi x in premico, merjen v tem vrstnem redu v pozitivni matematični smeri v I. ali II. kvadrantu.

Če je premica navpična, je $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Če premica ni navpična in ima enačbo $y = kx + n$, velja:

• $k \geq 0$: $\alpha = \arctan k$,

• $k < 0$: $\alpha = \pi + \arctan k$.



Št. točk

1

Kaj velja za smerna koeficienta vzporednih premic?

Naj bosta k_1 in k_2 smerna koeficienta dveh premic. Premici sta vzporedni, če je $k_1 = k_2$.

Št. točk

1

Kaj velja za smerna koeficienta pravokotnih premic?

Naj bosta k_1 in k_2 smerna koeficienta dveh premic. Premici sta pravokotni, če je $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Št. točk

2

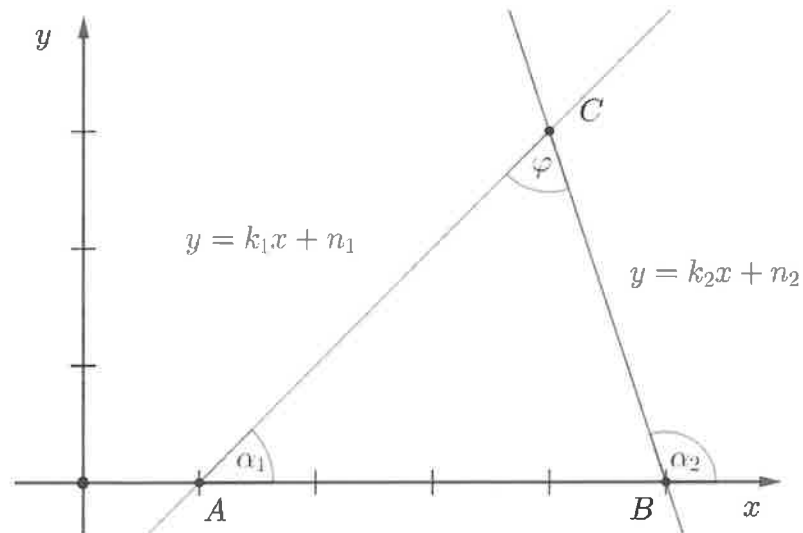
Izpeljite formulo za kot med premicama s smernima koeficientoma k_1 in k_2 .

Če imata premici enačbi $y = k_1x + n_1$ in $y = k_2x + n_2$, je kot med njima enak

$$\varphi = \arctan \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

DOKAZ. Imejmo premici v ravnini z enačbama $y = k_1x + n_1$ in $y = k_2x + n_2$. Naj bosta α_1 in α_2 naklonska kota teh premic in φ kot med njima.

V trikotniku ABC je α_2 zunanji kot, zato je enak vsoti preostalih dveh notranjih kotov, zato velja $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ in $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Izrazimo $\tan \varphi$, pri čemer upoštevamo adicijski



izrek za tangens:

$$\tan \varphi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_2 \tan \alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Po definiciji je kot med premicama ostri kot, torej $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$, zato zapišemo

$$\varphi = \arctan \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| = \arctan \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|,$$

kar zaključuje dokaz. □

55 Linearne neenačbe

Št. točk

2

Na primeru opišite reševanje linearnih neenačb z eno neznanko.

Pri reševanju neenačb upoštevamo, da se množica rešitev neenačbe ne spreminja, če:

- neenačbi na obeh straneh prištejemo ali odštejemo isto število ali izraz,
- neenačbo na obeh straneh množimo ali delimo z istim pozitivnim številom ali izrazom,
- če neenačbo na obeh straneh množimo ali delimo z istim negativnim številom ali izrazom, pri tem pa obrnemo znak neenakosti.

Rešimo neenačbo $-12x + 13 \leq -10x + 25$.

V prvem koraku na obeh straneh prištejemo $10x$ in prištejemo -13 , v drugem koraku pa neenačbo delimo z -2 , pri čemer se znak za neenakost obrne:

$$-12x + 13 \leq -10x + 25$$

$$-2x \leq 12$$

$$x \geq -6$$

Rešitev neenačbe so vsa realna števila x na pol zaprtem intervalu: $x \in [-6, \infty)$.

Št. točk

2

Naj bosta a in b realni števili. Obravnavajte linearno neenačbo $ax + b < 0$.

Obravnavamo neenačbo:

$$ax + b < 0$$

$$ax < -b$$

Neenačbo obravnavamo v odvisnosti od parametrov a in b . Ločimo naslednje primere:

- če je $a > 0$, je $x < -\frac{b}{a}$. Z drugimi besedami, rešitve neenačbe so $x \in (-\infty, -\frac{b}{a})$,
- če je $a = 0$, dobimo $b < 0$. Če je $b < 0$, so rešitve neenačbe vsi $x \in \mathbb{R}$, če je $b \geq 0$, je rešitev neenačbe prazna množica,
- če je $a < 0$, se pri deljenju znak za neenakost obrne in dobimo $x > -\frac{b}{a}$. Z drugimi besedami, rešitve neenačbe so $x \in (-\frac{b}{a}, \infty)$.

Št. točk

2

Za vsako od množic $[2, \infty)$ in \mathbb{R} povejte primer linearne neenačbe z eno neznanko, katere množica rešitev je dana množica.

Množica rešitev linearne neenačbe $2x \geq 4$ je $[2, \infty)$.

Množica rešitev linearne neenačbe $0 \cdot x \geq 0$ je \mathbb{R} .

56 Potenčna funkcija

Št. točk

1

Definirajte potenčno funkcijo z negativnim celim eksponentom.

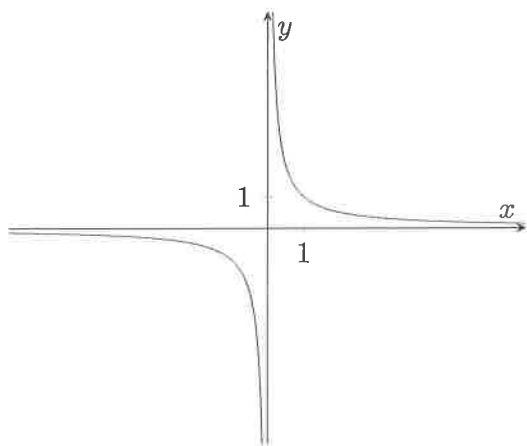
Potenčna funkcija z negativnim celim eksponentom je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = x^{-n}; \quad n \in \mathbb{N}.$$

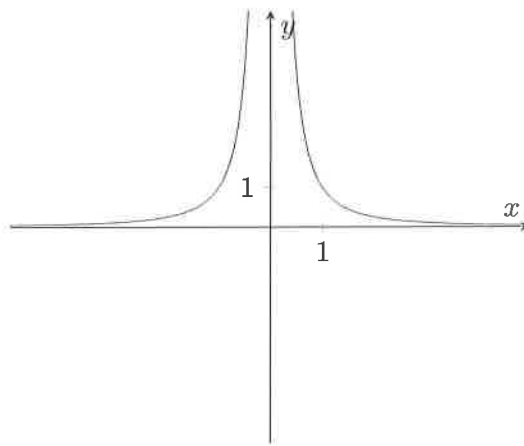
Št. točk

2

Narišite grafa potenčnih funkcij, ki imata eksponenta -1 in -2 .



Graf funkcije $f(x) = x^{-1}$.



Graf funkcije $f(x) = x^{-2}$.

Št. točk

3

Primerjajte lastnosti potenčnih funkcij s sodim in potenčnih funkcij z lihim negativnim celim eksponentom.

Za obe skupini potenčnih funkcij velja, da:

- nimajo ničle,
- imajo asimptoti z enačbama $x = 0$ in $y = 0$,
- na grafu leži točka $T(1, 1)$ in
- $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

Potenčne funkcije s sodim eksponentom:

- grafi potekajo skozi $A_1(-1, 1)$ in $A_2(1, 1)$,
- so padajoče na intervalu $(0, \infty)$,
- so naraščajoče na intervalu $(-\infty, 0)$,
- so konveksne na intervalih $(-\infty, 0)$ in $(0, \infty)$,
- $Z_f = (0, \infty)$
- so sode,
- niso niti injektivne niti surjektivne,
- so navzdol omejene.

Potenčne funkcije z lihim eksponentom:

- grafi potekajo skozi $A_1(-1, -1)$ in $A_2(1, 1)$,
- so padajoče na intervalih $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$,
- niso naraščajoče na nobenem intervalu,
- so konkavne na $(-\infty, 0)$, konveksne na $(0, \infty)$
- $Z_f = \mathbb{R} - \{0\}$,
- so lihe,
- so injektivne, niso surjektivne,
- so neomejene.

57 Korenska funkcija

Št. točk

2

Za poljubno naravno število n definirajte korensko funkcijo f s predpisom $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

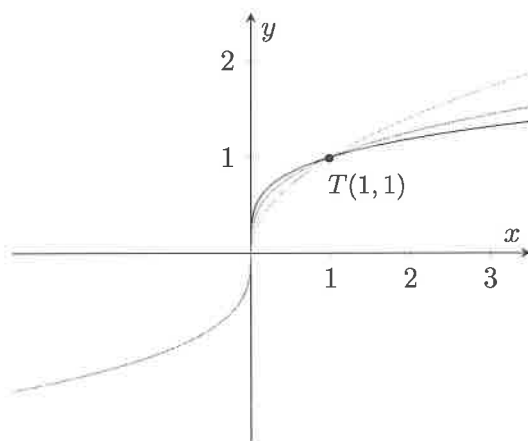
Naj bo n liho naravno število, večje od 1. Korenska funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = \sqrt[n]{x}$ je inverzna funkcija funkciji $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $g(x) = x^n$.

Naj bo n sodo naravno število. Tedaj je korenska funkcija $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ s predpisom $f(x) = \sqrt[n]{x}$ inverzna funkcija funkciji $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ s predpisom $g(x) = x^n$.

Št. točk

2

V isti koordinatni sistem narišite grafe korenskih funkcij za $n = 2$, $n = 3$ in $n = 4$.



S svetlo sivo je narisana graf za korensko funkcije za $n = 2$, s sivo za $n = 3$, s črno pa za za $n = 4$.

Št. točk

2

Povejte definicijsko območje in zalogo vrednosti poljubne korenske funkcije.

Pri korenskih funkcijah z lihim korenskim eksponentom je $D_f = \mathbb{R}$ in $Z_f = \mathbb{R}$.

Pri korenskih funkcijah s sodim korenskim eksponentom je $D_f = [0, \infty)$ in $Z_f = [0, \infty)$.

58 Kvadratna funkcija

Št. točk

1

Definirajte kvadratno funkcijo.

Kvadratna funkcija je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Št. točk

2

Naštejte vsaj štiri lastnosti kvadratne funkcije.

- Če je $a > 0$, je kvadratna funkcija **navzdol omejena**, padajoča na intervalu $(-\infty, p)$ in naraščajoča na intervalu (p, ∞) ter konveksna na celotnem definicijskem območju. S p smo označili absciso temena.
- Če je $a < 0$, je kvadratna funkcija **navzgor omejena**, naraščajoča na intervalu $(-\infty, p)$ in padajoča na intervalu (p, ∞) ter konkavna na celotnem definicijskem območju.
- Kvadratna funkcija je **soda** natanko tedaj, ko je koeficient $b = 0$.
- Nobena od kvadratnih funkcij **ni liha**.
- Kvadratna funkcija ima dve, eno dvojno ali nobene realne ničle.
- Kvadratna funkcija ni **niti injektivna niti surjektivna**.

Št. točk

2

Ali obstaja kvadratna funkcija, ki je liha? Poiščite vse sode kvadratne funkcije.

Nobena od kvadratnih funkcij ni liha.

Vse sode kvadratne funkcije so zajete s predpisom $f(x) = ax^2 + c$.

Št. točk

1

Povejte primer navzdol omejene sode kvadratne funkcije.

Primer navzdol omejene sode kvadratne funkcije je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = x^2$.

59 Teme grafa kvadratne funkcije

Št. točk

2

Kaj je teme grafa kvadratne funkcije? Kako ga izračunamo?

Teme grafa kvadratne funkcije je presečišče grafa kvadratne funkcije (parabole) in njegove simetrale.

Naj bo $f(x) = ax^2 + bx + c$ predpis kvadratne funkcije. Koordinati temena $T(p, q)$ izračunamo kot:

$$p = -\frac{b}{2a} \quad \text{in} \quad q = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Teme grafa kvadratne funkcije je najnižja točka na tem grafu, če je $a > 0$ oziroma najvišja točka na tem grafu, če je $a < 0$.

Št. točk

3

Izpeljite temensko obliko predpisa kvadratne funkcije.

Izhajamo iz splošne oblike predpisa kvadratne funkcije.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c$$

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Označimo $p = -\frac{b}{2a}$ in $q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Temenska oblika predpisa kvadratne funkcije je

$$f(x) = a(x - p)^2 + q,$$

kjer sta p in q koordinati temena $T(p, q)$.

Št. točk

1

Povejte primer navzgor omejene kvadratne funkcije, katere graf ima teme v prvem kvadrantu.

Primer navzgor omejene kvadratne funkcije, katere graf ima teme v prvem kvadrantu, je funkcija f s predpisom

$$f(x) = -(x - 2022)^2 + 2022.$$

60 Niče kvadratne funkcije

Št. točk

1

Definirajte ničlo funkcije in povejte ničelno obliko predpisa kvadratne funkcije.

Ničla funkcije f je tako število $x_0 \in \mathcal{D}_f$, da je $f(x_0) = 0$.

Ničelna oblika predpisa kvadratne funkcije:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Št. točk

1

Kaj je diskriminanta kvadratne funkcije?

Naj bo f kvadratna funkcija s predpisom $f(x) = ax^2 + bx + c$. Potem je **diskriminanta** kvadratne funkcije število

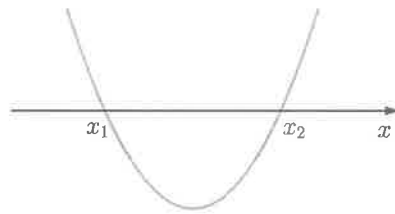
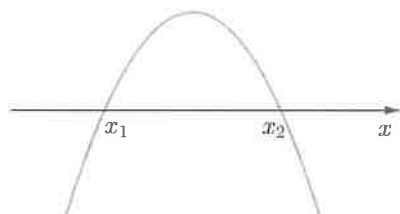
$$D = b^2 - 4ac.$$

Št. točk

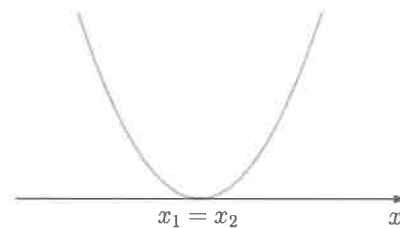
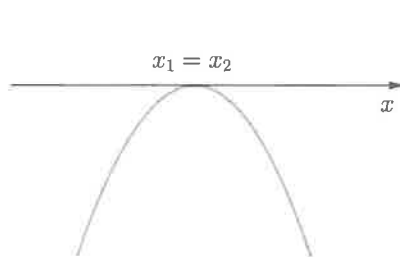
3

Razložite pomen diskriminante kvadratne funkcije pri iskanju njenih ničel.

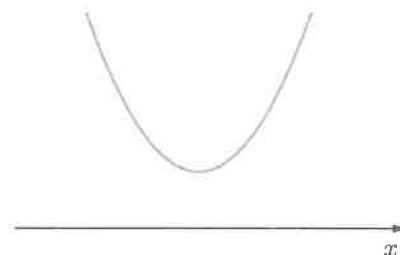
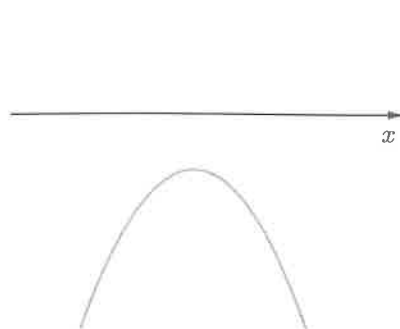
Če je $D > 0$, ima kvadratna funkcija dve različni realni ničli $x_{1,2}$:



Če je $D = 0$, ima kvadratna funkcija eno dvojno realno ničlo $x_1 = x_2$:



Če je $D < 0$, kvadratna funkcija nima realnih ničel.



Št. točk

1

Razložite zvezo med ničlami kvadratne funkcije in absciso temena njenega grafa.

Naj bo f kvadratna funkcija s predpisom $f(x) = ax^2 + bx + c$ in naj bosta x_1 in x_2 ničli ter p abscisa temena te kvadratne funkcije. Potem velja

$$x_1 + x_2 = 2p.$$

To dejstvo sledi iz Vietove formule, ki pravi, da je $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, in izraza za $p = -\frac{b}{2a}$.

61 Kvadratna enačba

Št. točk

1

Kaj je kvadratna enačba? Kako jo rešimo?

Kvadratna enačba je enačba oblike $ax^2 + bx + c = 0$, kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Rešitvi kvadratne enačbe sta

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Št. točk

2

Kako je z rešljivostjo kvadratne enačbe v množici realnih števil in kako v množici kompleksnih števil?

Naj bo $ax^2 + bx + c = 0$ kvadratna enačba in $D = b^2 - 4ac$ diskriminanta.

Če je $D > 0$, ima kvadratna enačba dve različni realni rešitvi.

Če je $D = 0$, ima kvadratna enačba eno dvojno realno rešitev.

Če je $D < 0$, kvadratna enačba nima realne rešitve, temveč dve konjugirani kompleksni rešitvi.

Št. točk

1

Povejte Vietovi formuli za kvadratno enačbo.

Naj bosta x_1 in x_2 rešitvi kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$. Vietovi formuli pravita:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{in} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Št. točk

2

Dokažite Vietovi formuli za kvadratno enačbo.

DOKAZ. Naj bo $ax^2 + bx + c = 0$ kvadratna enačba in naj bosta $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ in $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ njeni rešitvi. Potem je

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D} - b - \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b + \sqrt{D})(-b - \sqrt{D})}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

□

62 Kvadratna neenačba

Št. točk

1

Kaj je kvadratna neenačba?

Kvadratna neenačba je neenačba oblike

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ ali } ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ ali } ax^2 + bx + c < 0 \text{ ali } ax^2 + bx + c \leq 0,$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$ in $a \neq 0$.

Št. točk

3

Obravnavajte množico rešitev kvadratne neenačbe $f(x) < 0$ glede na vodilni koeficient in diskriminanto.

Naj bo f kvadratna funkcija s predpisom $f(x) = ax^2 + bx + c$. Naj bo $D = b^2 - 4ac$ diskriminanta kvadratne funkcije in naj bosta $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ in $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ ničli kvadratne funkcije.

Obravnavajmo neenačbo $ax^2 + bx + c < 0$.

Najprej obravnavajmo primere za $a > 0$:

- če je $D > 0$, so rešitve neenačbe $x \in (x_1, x_2)$,
- če je $D = 0$, so rešitve neenačbe $x \in \{\}$,
- če je $D < 0$, so rešitve neenačbe $x \in \{\}$.

Zdaj pa obravnavajmo še primere $a < 0$:

- če je $D > 0$, so rešitve neenačbe $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$,
- če je $D = 0$, so rešitve neenačbe $x \in \mathbb{R} - \{x_{1,2}\}$,
- če je $D < 0$, so rešitve neenačbe $x \in \mathbb{R}$.

Za lažje razumevanje glej slike pri vprašanju 60.

Št. točk

1

Povejte primer kvadratne neenačbe, katere množica rešitev je množica vseh realnih števil.

Primer takšne neenačbe je neenačba

$$x^2 + 2022 > 0.$$

Št. točk

1

Povejte primer kvadratne neenačbe, katere množica rešitev je množica $\{7\}$.

Primer takšne neenačbe je neenačba

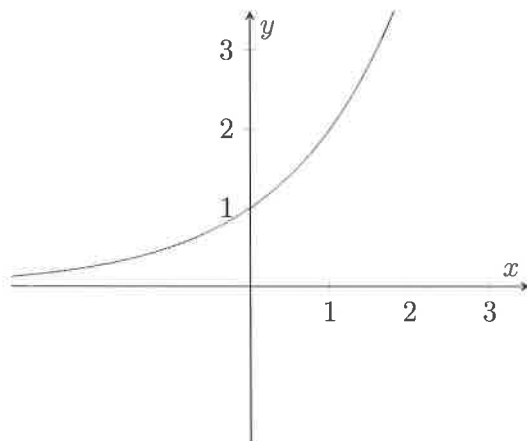
$$(x - 7)^2 \leq 0.$$

63 Eksponentna funkcija

Št. točk

1

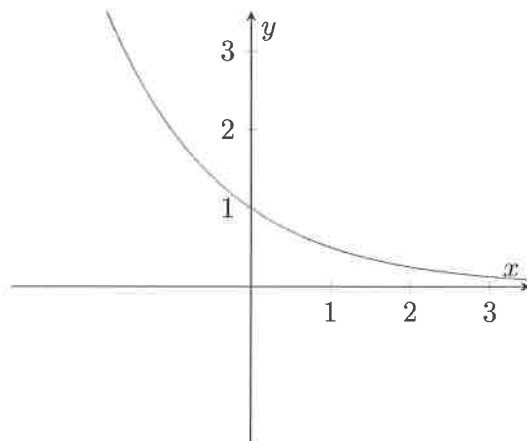
Naj bo $a > 1$. Skicirajte graf funkcije s predpisom $f(x) = a^x$.



Št. točk

1

Naj bo $0 < a < 1$. Skicirajte graf funkcije s predpisom $f(x) = a^x$.



Št. točk

2

Povejte vsaj štiri lastnosti eksponentne funkcije.

Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eksponentna funkcija s predpisom $f(x) = a^x$, kjer velja $a > 0$ in $a \neq 1$.

Lastnosti eksponentne funkcije so:

- definicijsko območje so vsa realna števila: $D_f = \mathbb{R}$,
- zaloga vrednosti je množica pozitivnih realnih števil: $Z_f = \mathbb{R}^+$,
- graf funkcije gre skozi točko $A(0, 1)$,
- funkcija je neomejena, največja spodnja meja je $m = 0$,
- za $a > 1$ je naraščajoča, za $0 < a < 1$ pa padajoča,

- funkcija je konveksna na celotnem definicijskem območju,
- funkcija je injektivna, ni pa surjektivna in s tem ni bijektivna,
- abscisna os je vodoravna asimptota grafa funkcije,
- eksponentna funkcija nima ničel.

Št. točk

2

V odvisnosti od realnega parametra c obravnavajte enačbo $f(x) = c$, kjer je f eksponentna funkcija.

Naj bo f eksponentna funkcija s predpisom $f(x) = a^x$, kjer $a > 1$ in $a \neq 0$. Obravnavajmo enačbo $a^x = c$.

Če je $c \leq 0$, enačba nima rešitev.

Če je $c > 0$, je rešitev enačbe $x = \log_a c$.

64 Logaritemska funkcija

Št. točk

1

Naj bo a pozitivno realno število. Definirajte logaritemsko funkcijo z osnovo a .

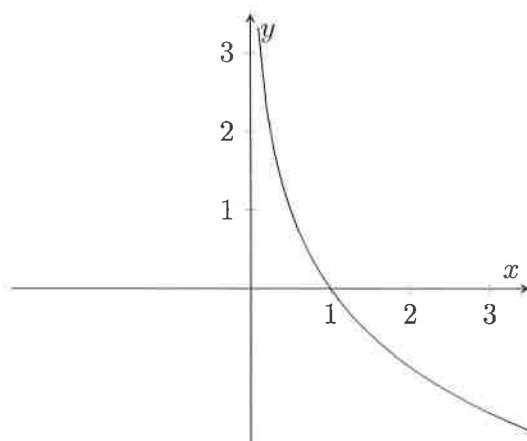
$$f(x) = \log_a x \Leftrightarrow a^{f(x)} = x, a > 0, a \neq 1,$$

pri čemer imenujemo a osnova logaritma in x logaritmand.

Št. točk

1

Naj bo $0 < a < 1$. Skicirajte graf logaritemske funkcije z osnovo a .



Št. točk

2

Povejte vsaj štiri lastnosti logaritemske funkcije.

Naj bo $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ logaritemska funkcija s predpisom $f(x) = \log_a x$, pri čemer je $a > 0$ in $a \neq 1$.

Lastnosti logaritemske funkcije so:

- definicijsko območje je množica pozitivnih realnih števil: $D_f = \mathbb{R}^+$,
- zaloga vrednosti je množica realnih števil: $Z_f = \mathbb{R}$,
- $x = 0$ je navpična asimptota grafa funkcije,
- ničla pri $x = 1$,
- je neomejena,
- če je $a > 1$, je funkcija na celotnem definicijskem območju naraščajoča. Če je $0 < a < 1$, je funkcija na celotnem definicijskem območju padajoča,
- če je $a > 1$, je funkcija na celotnem definicijskem območju konkavna. Če je $0 < a < 1$, je funkcija konveksna.

Št. točk

1

Naj bo a pozitivno realno število, $a \neq 1$. Razložite zvezo med predpisoma $f(x) = \log_a x$ in $g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$.

Velja $f(x) = -g(x)$, kar lahko preverimo s formulo za prehod na novo osnovo:

$$g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a(\frac{1}{a})} = \frac{\log_a x}{-1} = -\log_a x = -f(x).$$

65 Računanje z logaritmi

Dokažite, da za poljubni pozitivni realni števili a in b , $a \neq 1$ in $b \neq 1$, in za poljubni pozitivni realni števili x in y velja:

Št. točk

2

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$$

DOKAZ. Naj bo $\log_a x = m$ in $\log_a y = n$. Potem po definiciji logaritma sledi $a^m = x$ in $a^n = y$. Tako je $xy = a^m a^n = a^{m+n}$. Sledi $\log_a(xy) = m + n = \log_a x + \log_a y$. \square

Št. točk

2

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

DOKAZ. Naj bo $\log_a x = y$. Po definiciji logaritma sledi $x = a^y$. Če ta izraz na obeh straneh logaritmiramo z novo osnovo b , dobimo $\log_b x = \log_b a^y$. Uporabimo pravilo za logaritem potence in dobimo $\log_b x = y \log_b a$. Sedaj izrazimo y , ki je enak $\log_a x$, in zaključimo:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

\square

Št. točk

2

Povejte vsaj še dve pravili za računanje z logaritmi.

- a) $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y} \right)$ Razlika logaritmov je logaritem količnika.
b) $\log_a x^b = b \log_a x$ Eksponent lahko nesemo pred logaritem.

66 Polinomi

Št. točk

2

Definirajte polinom (polinomsko funkcijo). Kaj so stopnja, vodilni koeficient in prosti člen polinoma?

Polinom p stopnje n je realna funkcija $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kjer so $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ in velja $a_n \neq 0$.

Koeficient a_n imenujemo **vodilni koeficient**, člen a_0 pa **prosti člen**.

Št. točk

2

Kako seštevamo polinome? Kakšna je stopnja vsote dveh polinomov?

Naj bosta p in q si polinoma z realnimi koeficienti s stopnjama zaporedoma n in m . Naj bo brez škode za splošnost $n \geq m$.

Vsota polinomov p in q je polinom, ki ga dobimo tako, da seštejemo člene istih stopenj.

Stopnja vsote polinomov p in q je manjša ali enaka večji od stopenj polinomov p in q .

$$\text{st}(p(x) + q(x)) \leq \max \{ \text{st}(p(x)), \text{st}(q(x)) \},$$

pri čemer smo z \max označili največji največji element množice.

Št. točk

1

Povejte osnovni izrek o deljenju polinomov.

Imejmo polinoma z realnimi koeficienti p in q , pri čemer je q neničelni polinom. Potem obstajata enolično določena polinoma k in o , pri čemer ima slednji manjšo stopnjo od stopnje polinoma k , da velja

$$p(x) = q(x) \cdot k(x) + o(x).$$

Pri tem imenujemo p **deljenec**, q **delitelj**, k **količnik** in o **ostanek**.

Št. točk

1

Razložite deljenje poljubnega polinoma p s polinomom q s predpisom $q(x) = x - c$, kjer je c poljubno realno število.

Če nekonstanten polinom p delimo z linearnim polinomom $q(x) = x - c$, je ostanek pri deljenju konstanta, saj je ostanek nižje stopnje od delitelja. Po osnovnem izreku o deljenju polinomov velja:

$$p(x) = k(x)(x - c) + a.$$

Vrednost konstante lahko določimo. Če v zgornji enačbi x nadomestimo s c , dobimo

$$p(c) = k(c)(c - c) + a = a.$$

Torej je ostanek pri deljenju nekonstantnega polinoma p z linearnim polinomom $q(x) = x - c$ enak vrednosti polinoma p v $x = c$: $p(x) = k(x)(x - c) + p(c)$.

Deljenje poljubnega nekonstantnega polinoma z linearnim polinomom lahko opravimo s standardnim algoritmom za deljenje polinomov, zelo pogosto pa ga opravimo s **Hornerjevim algoritmom**, ki ga bomo razložili v nadaljevanju.

Naj bo p polinom z realnimi koeficienti s predpisom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$. Deljenje polnima p z linearnim polinomom q s predpisom $q = x - c$ opravimo tako, da sledimo spodnjim korakom:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
c	↓	cb_{n-1}	cb_{n-2}	...	cb_1	cb_0
	a_n	$cb_{n-1} + a_{n-1}$	$cb_{n-2} + a_{n-2}$...	$cb_1 + a_1$	$cb_0 + a_0$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}		b_0	r

1. Koeficiente polinoma p zapišemo v prvo vrstico tabele.
2. Vrednost c zapišemo na začetek druge vrstice.
3. Vodilni koeficient polinoma p , to je a_n , prepisemo v tretjo vrstico tabele.
4. Število a_n naj bo enako b_{n-1} . Število b_{n-1} v tretji vrstici pomnožimo s številom c in dobljeni produkt cb_{n-1} zapišemo v drugo vrstico v naslednji stolpec desno. Seštejemo a_{n-1} in cb_{n-1} ter vsoto $cb_{n-1} + a_{n-1}$ prepisemo v tretjo vrstico in jo označimo z b_{n-2} .
5. S postopkom pri prejšnji točki nadaljujemo do konca.
6. S postopkom, prikazanim v tabeli, dobimo rezultat deljenja. Prvih n števil v zadnji vrstici predstavlja koeficiente količnika $k(x)$, zadnje število pa ostanek $r \in \mathbb{R}$. S tem, ko tako poznamo količnik, torej $k(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0$, in ostanek $r(x) = r$, smo deljenje polinomov p in q uspešno izvedli.

Pokažimo ga še na primeru deljenja polinoma $p(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$ z linearnim polinomom $q(x) = x + 2$. Sledimo spodnjim korakom:

	1	6	12	9
-2	↓	-2	-8	-8
	1	4	4	1

1. Koeficiente polinoma p zapišemo v prvo vrstico tabele.
2. Vrednost $c = -2$ zapišemo na začetek druge vrstice.
3. Vodilni koeficient polinoma p , to je 1, prepisemo v tretjo vrstico tabele.
4. Število 1 v tretji vrstici pomnožimo s številom -2 in dobljeni produkt -2 zapišemo v drugo vrstico v naslednji stolpec desno.
5. Števili 6 in -2 v naslednjem stolpcu seštejemo in njuno vsoto 4 zapišemo v tretjo vrstico. Pomnožimo ga s številom -2 in zmnožek -8 prepisemo v desni stolpec.
6. Števili 12 in -8 v naslednjem stolpcu seštejemo in njuno vsoto 4 zapišemo v tretjo vrstico. Pomnožimo ga s številom -2 in zmnožek -8 prepisemo v desni stolpec.
7. Števili 9 in -8 v naslednjem stolpcu seštejemo in dobimo zadnjo vsoto 1, ki predstavlja ostanek pri deljenju polinoma p s polinomom q .
8. Koeficienti količnika k so števila v tretji vrstici, tako je $k(x) = x^2 + 4x + 4$.

67 Ničle polinomov

Št. točk

1

Koliko realnih ničel ima lahko poljuben polinom stopnje n ?

Poljuben polinom stopnje n ima lahko največ n realnih ničel.

Št. točk

1

Polinom p stopnje n naj ima n paroma različnih ničel. Kako lahko zapišemo predpis polinoma p , da bodo iz njega razvidne vse njegove ničle?

Naj bodo $x_1, x_2 \dots x_n$ ničle polinoma p . Potem lahko predpis polinoma zapišemo kot

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

pri čemer je a vodilni koeficient polinoma. Zapis imenujemo **ničelna oblika** polinoma.

Št. točk

2

Koliko realnih ničel ima lahko polinom tretje in koliko polinom četrte stopnje? Navedite vse možnosti.

Polinom tretje stopnje ima lahko bodisi tri bodisi eno realno ničlo.

Polinom četrte stopnje ima lahko bodisi štiri bodisi dve bodisi nič realnih ničel.

Št. točk

2

Opišite metodo bisekcije za iskanje ničel polinomov.

Metoda bisekcije je postopek računanja približkov lihih realnih ničel polinoma. Z metodo bisekcije ničlo omejimo na dovolj majhen interval. Intervale v vsakem koraku razpolovljamo. Na koncu določimo približek ničle.

Denimo, da je nek polinom p v krajiščih intervala $[a, b]$ različno predznačen: $p(a) > 0$ in $p(b) < 0$ ali $p(a) < 0$ in $p(b) > 0$. To pomeni, da graf polinoma p na tem intervalu zagotovo seka os x , kar pomeni, da ima p na tem intervalu ničlo lihe stopnje.

To ničlo določimo tako, da interval $[a, b]$ razpolovimo. Dobimo c_1 in določimo tistega od intervalov $[a, c_1]$ in $[c_1, b]$, kjer je p različno predznačen. Naj bo to brez škode za splošnost interval $[a, c_1]$. Potem ima p ničlo na intervalu $[a, c_1]$.

Razpolovimo interval $[a, c_1]$, dobimo c_2 in določimo tistega od novih intervalov, kjer je p različno predznačen. Tako lahko nadaljujemo poljubno dolgo oziroma naredimo toliko korakov bisekcije, da določimo ničlo do želene natančnosti.

68 Racionalna funkcija

Št. točk

2

Kako poiščemo ničle in pole racionalne funkcije?

Naj bo $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ racionalna funkcija, pri čemer sta p in q tuja si polinoma z realnimi koeficienti ter q neničelni polinom.

Ničle racionalne funkcije so ničle polinoma v števcu.

Poli racionalne funkcije so ničle polinoma v imenovalcu.

Št. točk

2

Naj bo x_0 ničla racionalne funkcije f . Razložite obnašanje funkcije f v dovolj majhni okolici ničle x_0 . Navedite vse možnosti.

V okolici ničle x_0 se racionalna funkcija obnaša podobno kot polinom v števcu.

Če je ničla x_0 lihe stopnje, funkcija v ničli spremeni predznak. Graf funkcije v ničli seka abscisno os.

Če je ničla x_0 sode stopnje, funkcija pri prehodu skozi ničlo ohrani predznak. Graf funkcije se v ničli dotakne abscisne osi.

Št. točk

2

Naj bo x_0 pol racionalne funkcije f . Razložite obnašanje funkcije f v dovolj majhni okolici pola x_0 . Navedite vse možnosti.

V polu racionalna funkcija ni definirana.

Če je pol x_0 lihe stopnje, funkcija v polu spremeni predznak.

Če je pol x_0 sode stopnje, funkcija v polu ohrani predznak.

Ko se x približuje x_0 z leve ali desne, gredo vrednosti funkcije čez vsako mejo ali pod vsako mejo. Čez pol poteka navpična asimptota grafa racionalne funkcije.

69 Racionalna funkcija

Št. točk

3

Naj ima racionalna funkcija f vse ničle in pole na intervalu (a, b) . Razložite obnašanje racionalne funkcije f na intervalih $(-\infty, a)$ in (b, ∞) . Navedite vse možnosti.

Naj bosta p in q polinoma z realnimi koeficienti zaporedoma s stopnjama n in m s predpisoma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

in

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0.$$

Naj bo r racionalna funkcija s predpisom $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$.

Za racionalno funkcijo r na intervalih $(-\infty, a)$ in (b, ∞) , to je daleč od koordinatnega izhodišča, lahko velja:

- Če je $n < m$, potem ima graf funkcije vodoravno asimptoto pri $y = 0$.
- Če je $n = m$, potem ima graf funkcije vodoravno asimptoto z enačbo $y = \frac{a_n}{b_m}$.
- Če je $n > m$, potem je asimptota graf funkcije polinoma stopnje vsaj 1. Graf funkcije ima bodisi poševno asimptoto ali pa asimptotsko krivuljo, odvisno od tega, za koliko se stopnji polinomov p in q razlikujeta.

Št. točk

2

Kdaj ima graf racionalne funkcije poševno asimptoto? Kako izračunamo enačbo poševne asimptote, če obstaja?

Če je polinom v števcu za eno stopnjo višji od polinoma v imenovalcu, ima graf racionalne funkcije poševno asimptoto

Naj bo k kvocient in o ostanek pri deljenju polinoma p s polinomom q . Tedaj je

$$\frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{o(x)}{q(x)}.$$

Premica $y = k(x)$ je asimptota grafa racionalne funkcije. Poiščemo jo torej tako, da polinom p delimo s polinomom q – dobljeni količnik k je enačba asimptote.

Št. točk

1

Povejte svoj primer racionalne funkcije, katere graf ima asimptoto z enačbo $y = 2x$.

Primer racionalne funkcije, katere graf ima asimptoto z enačbo $y = 2x$, je racionalna funkcija $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$r(x) = \frac{2x^2 - 2x - 3}{x - 1}.$$

70 Funkcija sinus

Št. točk

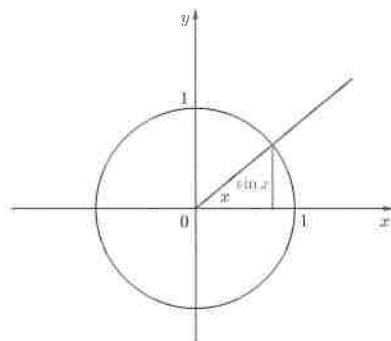
1

Definirajte funkcijo sinus.

Sinus poljubnega kota x (oznaka: $\sin x$) je ordinata točke, v kateri premični krak kota seka enotsko krožnico.

Vrh kota x je v koordinatnem izhodišču, eden od krakov kota je pozitivni del osi x . Drugi krak kota (premični krak) odmerimo v pozitivni matematični smeri, njegova lega pa je odvisna od velikosti kota.

Enotska krožnica je krožnica s središčem v koordinatnem izhodišču in polmerom 1.



Št. točk

2

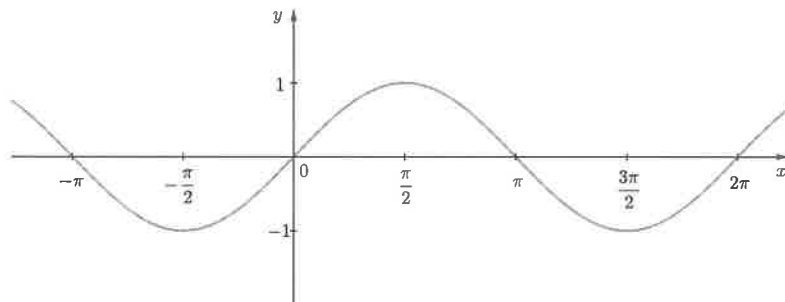
Koliko je osnovna perioda funkcije sinus? Povejte vse ničle funkcije sinus.

Osnovna perioda funkcije sinus je 2π . Ničle funkcije sinus so v točkah $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Št. točk

1

Narišite graf funkcije sinus.



Št. točk

2

Za katere $a \in \mathbb{R}$ premica z enačbo $y = a$ seka graf funkcije sinus? V primerih, ko imata dana premica in graf funkcije sinus neprazen presek, povejte vsa njuna presečišča.

Premica z enačbo $y = a$ seka graf funkcije sinus pri vrednostih $a \in [-1, 1]$.

Presečišča določimo iz rešitev trigonometrične enačbe $\sin x = a$.

Če je $a = 1$, so rešitve enačbe $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Presečišča so v točkah $T\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1\right)$.

Če je $a = 0$, so rešitve enačbe $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Presečišča so v točkah $T(k\pi, 0)$.

Če je $a = -1$, so rešitve enačbe $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Presečišča so v točkah $T\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -1\right)$.

V ostalih primerih dobimo dve družini rešitev enačbe:

$$x = \arcsin a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{in} \quad x = \pi - \arcsin a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

in s tem dve družini presečišč:

$$T_1(\arcsin a + 2k\pi, a) \quad \text{in} \quad T_2(\pi - \arcsin a + 2k\pi, a).$$

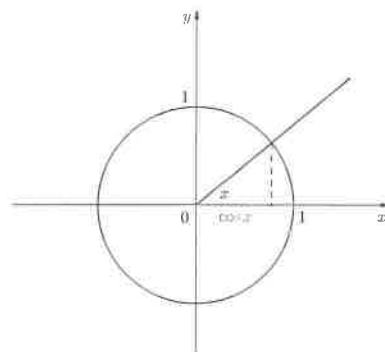
71 Funkcija kosinus

Št. točk

1

Definirajte funkcijo kosinus.

Kosinus poljubnega kota x (oznaka: $\cos x$) je enak abscisi točke, v kateri prečni krak kota seka enotsko krožnico.



Št. točk

2

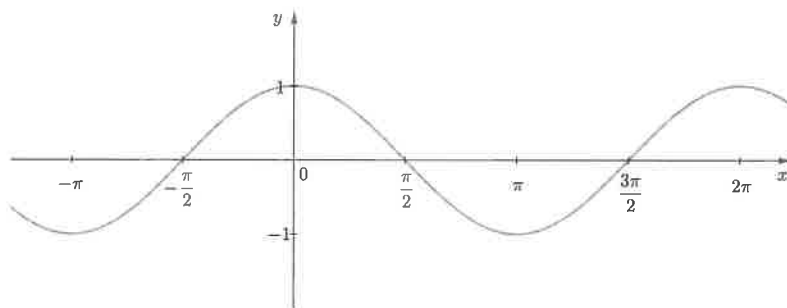
Koliko je osnovna perioda funkcije kosinus? Povejte vse ničle funkcije kosinus.

Osnovna perioda funkcije kosinus je 2π . Ničle funkcije kosinus so v točkah $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Št. točk

1

Narišite graf funkcije kosinus.



Št. točk

2

Za katere $a \in \mathbb{R}$ premica z enačbo $y = a$ seka graf funkcije kosinus? V primerih, ko imata dana premica in graf funkcije kosinus neprazen presek, povejte vsa njuna presečišča.

Premica z enačbo $y = a$ seka graf funkcije kosinus pri vrednostih $a \in [-1, 1]$.

Presečišča so rešitve trigonometrične enačbe $\cos x = a$.

Če je $a = 1$, so rešitve enačbe $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Presečišča so v točkah $T(2k\pi, 1)$.

Če je $a = 0$, so rešitve enačbe $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Presečišča so v točkah $T(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$.

Če je $a = -1$, so rešitve enačbe $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Presečišča so v točkah $T(\pi + 2k\pi, -1)$.

V ostalih primerih dobimo dve družini rešitev

$$x = \arccos a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{in} \quad x = -\arccos a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

in s tem dve družini presečišč:

$$T_1(\arccos a + 2k\pi, a) \quad \text{in} \quad T_2(-\arccos a + 2k\pi, a).$$

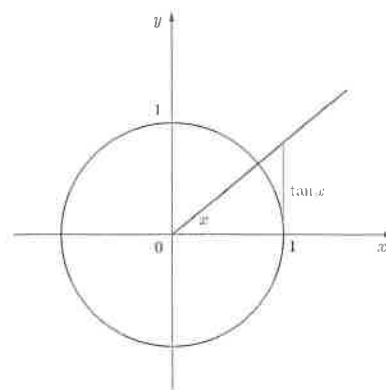
72 Funkcija tangens

Št. točk

1

Definirajte funkcijo tangens.

Tangens poljubnega kota x (oznaka: $\tan x$) je ordinata točke, v kateri tangenta na enotsko krožnico v točki $(1, 0)$ seka nosilko premičnega kraka kota.



Št. točk

1

Povejte definicijsko območje funkcije tangens.

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Št. točk

1

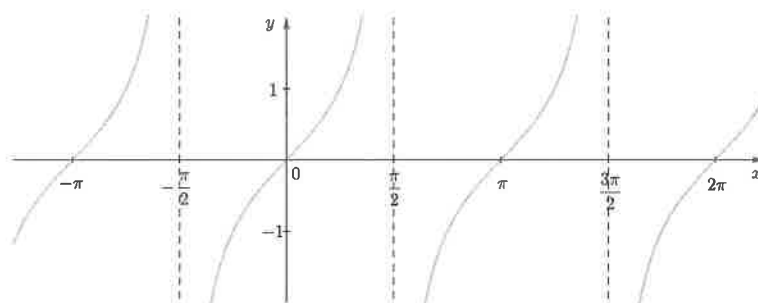
Koliko je osnovna perioda funkcije tangens? Povejte vse ničle funkcije tangens.

Osnovna perioda funkcije tangens je π . Ničle funkcije tangens so v točkah $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Št. točk

1

Narišite graf funkcije tangens.



Št. točk

2

Za katere $a \in \mathbb{R}$ premica z enačbo $y = a$ seka graf funkcije tangens? V primerih, ko imata dana premica in graf funkcije tangens neprazen presek, povejte vsa njuna presečišča.

Premica z enačbo $y = a$ seka graf funkcije tangens za vsako realno število a .

Presečišča so rešitve trigonometrične enačbe $\tan x = a$, in sicer

$$x = \arctan a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Družino presečišč zapišemo kot $T(\arctan a + k\pi, a)$.

73 Kotne funkcije

Št. točk

1

Za vsako kotno funkcijo (sinus, kosinus, tangens in kotangens) povejte, ali je soda oziroma liha.

Funkcije sinus, tangens in kotangens so lihe, funkcija kosinus pa soda.

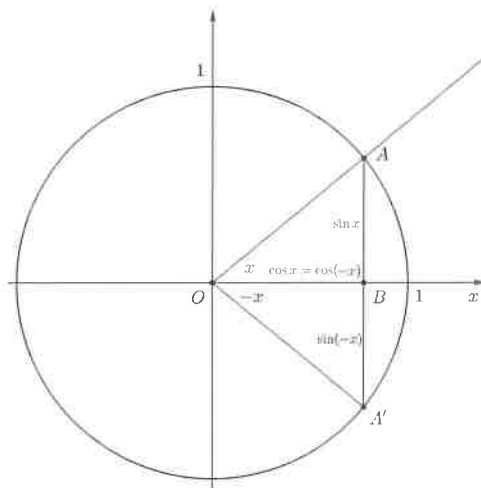
Št. točk

2

Utemeljite odgovore iz prvega vprašanja.

Odgovor utemeljimo za vsako od štirih kotnih funkcij posebej.

Sinus: Predstavimo kota x in $-x$ na enotski krožnici. Opazimo, da sta trikotnika OBA in OBA' skladna, saj imata dva skladna kota in eno stranico: $|OA| = |OA'|$. Iz tega sledi, da so vse stranice teh trikotnikov skladne, od tod pa $|\sin x| = |\sin(-x)|$ in $\sin x = -\sin(-x)$, saj je $\sin(-x) < 0$. Od tod sledi $\sin(-x) = -\sin x$, kar pomeni, da je sinus liha funkcija.



Kosinus: Enako kot pri prejšnji točki utemeljimo, da sta trikotnika OBA in $OB'A'$ skladna, kar pomeni, da so vse stranice skladne. Od tod sledi $|OB| = |OB'|$ in $|\cos x| = |\cos(-x)|$ ter $\cos(x) = \cos(-x)$, kar pomeni, da je kosinus soda funkcija.

Tangens: Označimo $f(x) = \tan x$. Upoštevamo ugotovitvi pri prejšnjih točkah in dobimo

$$f(-x) = \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x = -f(x)$$

ter zaključimo, da je tangens liha funkcija.

Kotangens: Označimo $f(x) = \cot x$. Upoštevamo ugotovitev pri prejšnji točki in dobimo

$$f(-x) = \cot(-x) = \frac{1}{\tan(-x)} = \frac{1}{-\tan x} = -\frac{1}{\tan x} = -\cot x = -f(x)$$

ter zaključimo, da je kotangens liha funkcija. □

Št. točk

2

Za vsako kotno funkcijo f (sinus, kosinus, tangens ali kotangens) povejte zvezo med $f(\pi - x)$ ter zvezo med $f(\pi + x)$ in $f(x)$ za vsak x iz definicijskega območja funkcije f .

$$\begin{array}{ll} \sin(\pi - x) = \sin x & \sin(\pi + x) = -\sin x \\ \cos(\pi - x) = -\cos x & \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \tan(\pi - x) = -\tan x & \tan(\pi + x) = \tan x \\ \cot(\pi - x) = -\cot x & \cot(\pi + x) = \cot x \end{array}$$

Št. točk

1

Dokažite, da je $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ za vsako realno število x .

DOKAZ. Veljavnost lastnosti za vsako realno število x najlažje dokažemo z adicijskim izrekom za sinus:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{2} \cos x - \sin x \cos\frac{\pi}{2} = 1 \cdot \cos x - \sin x \cdot 0 = \cos x.$$

□

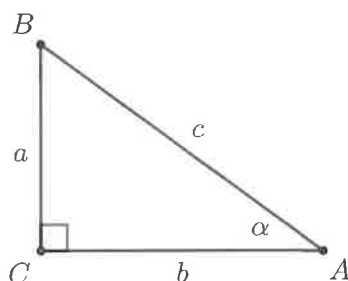
74 Kotne funkcije v pravokotnem trikotniku

Št. točk

2

Naj bo α ostri kot v danem pravokotnem trikotniku. Definirajte sinus, kosinus, tangens in kotangens kota α .

Naj bodo a , b in c v pravokotnem trikotniku zaporedoma kotu α nasprotna kateta, priležna kateta in hipotenuza.



Sinus kota je razmerje med kotu nasprotno kateto in hipotenuzo.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

Tangens kota je razmerje med kotu nasprotno kateto in priležno kateto.

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

Kosinus kota je razmerje med kotu priležno kateto in hipotenuzo.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Kotangens kota je razmerje med kotu priležno kateto in nasprotno kateto.

$$\cot \alpha = \frac{b}{a}$$

Št. točk

2

Naj bo α poljuben kot, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Povejte osnovno zvezo med $\sin \alpha$ in $\cos \alpha$ ter jo dokažite.

Naj bodo a , b in c v pravokotnem trikotniku zaporedoma kotu α nasprotna kateta, priležna kateta in hipotenuza.

Osnovna zveza med $\sin \alpha$ in $\cos \alpha$ je

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

DOKAZ. Po definiciji velja $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ in $\cos \alpha = \frac{b}{c}$.

V nadaljevanju upoštevamo Pitagorov izrek $a^2 + b^2 = c^2$:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Dokaz je končan. □

Povejte še vsaj štiri zveze med kotnimi funkcijami v pravokotnem trikotniku in eno med njimi dokažite.

Zveze med kotnimi funkcijami:

$$\text{a) } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{d) } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\text{b) } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\text{e) } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\text{c) } \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

DOKAZ. Upoštevamo definicije kotnih funkcij v pravokotnem trikotniku in ugotovitve pri prejšnjih točkah.

$$\text{a) } \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{b) } \cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\text{c) } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\text{d) } 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\text{e) } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

□

75 Kotne funkcije

Št. točk

2

Povejte adicijska izreka za funkciji sinus in kosinus.

Adicijska izreka za funkcijo sinus:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha.$$

Adicijska izreka za funkcijo kosinus:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Št. točk

2

Izrazite $\sin(2x)$ in $\cos(2x)$ s $\sin x$ in $\cos x$. Eno od formul dokažite.

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

DOKAZ. Pri dokazu obeh trditev uporabimo adicijski izrek za sinus oziroma kosinus:

$$\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

□

Št. točk

2

Izrazite $\tan(2x)$ s $\tan x$. Dokažite.

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

DOKAZ.

$$\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x},$$

pri čemer smo v zadnjem koraku števec in imenovalec delili s $\cos^2 x$. To lahko brez škode storimo, saj pri $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ko je $\cos^2 x = 0$, funkcija $\tan(2x)$ ni definirana. □

76 Krožne funkcije

Št. točk

1

Definirajte funkcijo arkus sinus.

Funkcija **arkus sinus** je inverzna funkcija funkcije sinus, ki preslika interval $[-1, 1]$ na interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$f(x) = \arcsin x, \text{ če je } \sin f(x) = x \text{ in } f(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Št. točk

2

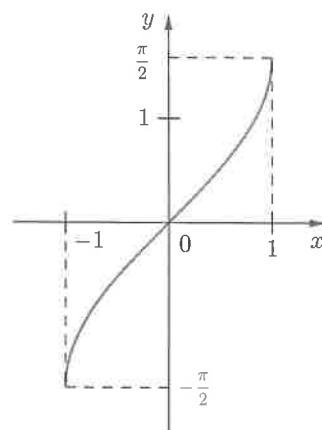
Povejte definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije arkus sinus.

$$\mathcal{D}_f = [-1, 1], \mathcal{Z}_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Št. točk

1

Narišite graf funkcije arkus sinus.



Št. točk

1

Definirajte funkcijo arkus tangens.

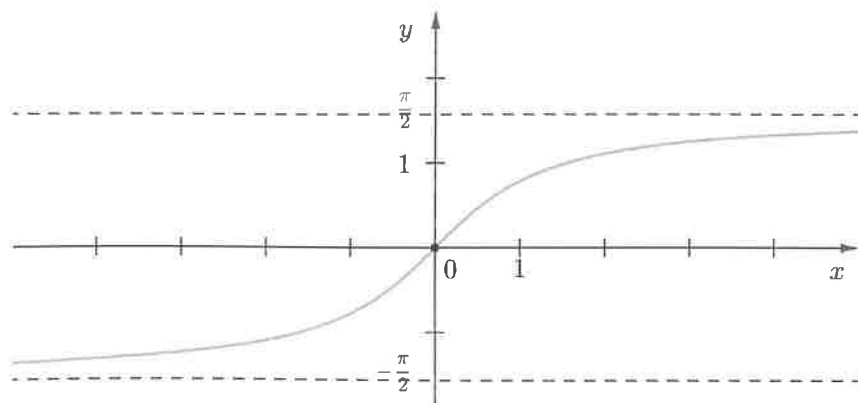
Funkcija **arkus tangens** je inverzna funkcija funkcije tangens, ki preslika interval $(-\infty, \infty)$ na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$\arctan x = f(x), \text{ če je } \tan f(x) = x \text{ in } f(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Št. točk

1

Narišite graf funkcije arkus tangens.



77 Krožnica

Št. točk

2

Povejte geometrijsko definicijo krožnice in izpeljite enačbo krožnice s polmerom r in s središčem v točki $S(p, q)$.

Krožnica je množica točk v ravnini, ki so enako oddaljene od neke vnaprej izbrane točke. Ta oddaljenost se imenuje polmer, točka pa središče.

Izpeljimo enačbo krožnice. Polmer označimo z r , središče pa naj bo v točki $S(p, q)$. Iščemo točke $T(x, y)$, ki so za r oddaljene od $S(p, q)$.

$$\begin{aligned}d(T, S) &= r \\ \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} &= r \\ (x-p)^2 + (y-q)^2 &= r^2\end{aligned}$$

Št. točk

2

Naj bodo A, D, E in F realna števila in naj bo $A \neq 0$. Katere množice točk v ravnini lahko predstavlja enačba $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$?

Enačba lahko predstavlja krožnico, točko ali prazno množico.

Št. točk

2

Analizirajte, za katera realna števila a in b enačba $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 4 = 0$ predstavlja krožnico.

Enačbo preoblikujemo v

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = a^2 + b^2 - 4.$$

Enačba predstavlja krožnico, če je $a^2 + b^2 - 4 > 0$.

78 Elipsa

Št. točk

2

Povejte geometrijsko definicijo elipse.

Elipsa je množica točk v ravnini, za katere je vsota razdalj od dveh vnaprej izbranih točk stalna. Vnaprej izbrani točki imenujemo gorišči in ju označimo z F_1 in F_2 .

Št. točk

2

Povejte enačbo elipse s središčem v koordinatnem izhodišču in enačbo elipse s središčem v točki $S(p, q)$. V obeh primerih naj bosta osi elipse vzporedni koordinatnima osema.

Enačba elipse v središčni legi je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Enačba elipse, ki ima središče v točki $S(p, q)$ in osi vzporedni koordinatnima osema, je

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$

Št. točk

2

Naj bodo A, C, D, E in F realna števila in naj bo $A \cdot C > 0$. Katere množice točk v ravnini lahko predstavlja enačba $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$?

Enačba lahko predstavlja elipso (v primeru $A = C$ krožnico), točko ali prazno množico.

79 Hiperbola

Št. točk

2

Povejte geometrijsko definicijo hiperbole.

Hiperbola je množica točk v ravnini, za katere je razlika razdalj od dveh vnaprej izbranih točk stalna. Vnaprej izbrani točki imenujemo gorišči in ju označimo s F_1 in F_2 .

Št. točk

2

Povejte enačbo hiperbole s središčem v koordinatnem izhodišču in enačbo hiperbole s središčem v točki $S(p, q)$. V obeh primerih naj bosta osi hiperbole vzporedni koordinatnima osema.

Enačba hiperbole s središčem v koordinatnem izhodišču, pri čemer sta osi hiperbole vzporedni koordinatnima osema, je

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$

Enačba hiperbole s središčem v $S(p, q)$ je

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = \pm 1.$$

Če je predznak na desni strani enačbe $+$, sta gorišči na vodoravni osi, če pa je predznak na desni strani enačbe $-$, sta gorišči hiperbole na navpični osi.

Št. točk

2

Naj bodo A, C, D, E in F realna števila in naj bo $A \cdot C < 0$. Katere množice točk v ravnini lahko predstavlja enačba $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$?

Enačba lahko predstavlja hiperbolo ali dve premici.

80 Parabola

Št. točk

2

Povejte geometrijsko definicijo parabole.

Parabola je množica točk v ravnini, ki so enako oddaljene od neke vnaprej izbrane premice in neke vnaprej izbrane točke. To premico imenujemo **vodnica**, točko pa **gorišče**.

Št. točk

2

Povejte enačbo parabole, ki ima teme v točki $T(r, d)$, njena os simetrije pa je vzporedna abscisni osi. Izračunajte gorišče in enačbo premice vodnice te parabole.

Enačba parabole s temenom v točki $T(r, d)$, katere os simetrije je vzporedna abscisni osi, je

$$(y - d)^2 = 2p(x - r),$$

kjer je p parameter parabole.

V središčni legi, kjer je teme v točki $T'(0, 0)$, je gorišče parabole $F(\frac{p}{2}, 0)$, enačba premice vodnice pa $x = -\frac{p}{2}$. Če parabolo vzporedno premaknemo tako, da bo teme nove parabole v točki $T(r, d)$, izračunamo gorišče premaknjene parabole tako, da abscisi prvotnega gorišča prištejemo r , ordinati prištejemo d in dobimo točko

$$F\left(\frac{p}{2} + r, d\right).$$

Vodnica je navpičnica, zato se premakne samo v smeri x , in sicer za r . Enačba vodnice premaknjene parabole je tako

$$x = -\frac{p}{2} + r.$$

Št. točk

2

Naj bodo A, C, D, E in F realna števila in naj bo $A = 0$ in $C \neq 0$ ali $C = 0$ in $A \neq 0$. Katere množice točk v ravnini lahko predstavlja enačba

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0?$$

Enačba lahko predstavlja parabolo, katere os je vzporedna bodisi osi x bodisi osi y , dve navpični premici, (dvakrat šteto) navpično premico, dve vodoravni premici, (dvakrat šteto) vodoravno premico ali prazno množico.

81 Zaporedja

Št. točk

2

Definirajte zaporedje. Kaj je graf zaporedja?

Naj bo $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ ali $\mathcal{A} = \{1, 2 \dots n\}$. Potem funkcijo $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ imenujemo zaporedje. Z drugimi besedami, zaporedje je funkcija, ki iz naravnih števil slika v realna števila.

$f(n) = a_n$ imenujemo splošni člen zaporedja.

Graf zaporedja s splošnim členom a_n je $\Gamma_{a_n} = \{(n, a_n); n \in \mathbb{N} \text{ ali } n \in \{1, 2 \dots m\}, m \in \mathbb{N}\}$.

Zaporedja so lahko končna ali neskončna.

Št. točk

2

Kdaj je zaporedje monotono in kdaj omejeno?

Zaporedje je **monotono**, če je naraščajoče ali padajoče. Zaporedje je naraščajoče, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_{n+1} \geq a_n$. Zaporedje je padajoče, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_{n+1} \leq a_n$.

Zaporedje je **omejeno**, če je hkrati omejeno navzgor in navzdol. Zaporedje je navzgor oziroma navzdol omejeno, če ima kakšno zgornjo oziroma spodnjo mejo. Število $M \in \mathbb{R}$ je zgornja meja zaporedja, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja, da je $a_n \leq M$. Število $m \in \mathbb{R}$ je spodnja meja zaporedja, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja, da je $a_n \geq m$.

Št. točk

1

Kdaj je zaporedje konvergentno in kdaj divergentno?

Zaporedje je **konvergentno**, če je neskončno in ima limito, oziroma **divergentno**, če nima limite.

Št. točk

1

Povejte primer konvergentnega in primer divergentnega zaporedja.

Primer konvergentnega zaporedja: $a_n = \frac{1}{n}$.

Primer divergentnega zaporedja: $a_n = n$.

82 Aritmetično zaporedje

Št. točk

1

Definirajte aritmetično zaporedje in povejte njegov splošni člen.

Zaporedje je **aritmetično**, če je razlika dveh sosednjih členov konstantna, kar zapišemo $a_{n+1} - a_n = d$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Število d je **diferenca zaporedja**. Splošni člen aritmetičnega zaporedja je $a_n = a_1 + (n - 1)d$, kjer je a_1 prvi člen zaporedja.

Št. točk

1

Podajte primer padajočega aritmetičnega zaporedja.

Primer padajočega aritmetičnega zaporedja: 3, 2, 1, 0 ...

Št. točk

2

Kako izračunamo vsoto prvih n členov aritmetičnega zaporedja, če poznamo prvi člen in diferenco? Trditev dokažite.

Naj bo a_1 prvi člen tega zaporedja in d diferenca. Potem vsoto prvih n členov aritmetičnega zaporedja izračunamo kot

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d).$$

DOKAZ.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ 2S_n &= n \cdot (2a_1 + (n - 1)d) \\ S_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) \end{aligned}$$

□

Št. točk

2

Dokažite, da je zaporedje (a_k) aritmetično natanko tedaj, ko je za poljubno naravno število n aritmetična sredina členov a_n in a_{n+2} enaka a_{n+1} .

Ker dokazujemo ekvivalenco, moramo trditev dokazati v obe smeri.

Najprej predpostavimo, da je zaporedje (a_k) aritmetično. Potem je aritmetična sredina členov a_n in a_{n+2} enaka

$$\frac{a_n + a_{n+2}}{2} = \frac{a_n + a_n + 2d}{2} = \frac{2(a_n + d)}{2} = a_n + d = a_{n+1}.$$

Naj bo zdaj aritmetična sredina členov a_n in a_{n+2} nekega zaporedja enaka a_{n+1} za poljubno naravno število n . Potem velja

$$\begin{aligned} \frac{a_n + a_{n+2}}{2} &= a_{n+1} \\ a_n + a_{n+2} &= 2a_{n+1} \\ a_{n+2} - a_{n+1} &= a_{n+1} - a_n, \end{aligned}$$

kar z drugimi besedami pomeni, da je razlika (diferenca) med poljubnima dvema zaporednima členoma tega zaporedja enaka, kar pa ustreza definiciji aritmetičnega zaporedja in dokaz je končan. □

83 Geometrijsko zaporedje

Št. točk

1

Definirajte geometrijsko zaporedje in povejte njegov splošni člen.

Zaporedje je **geometrijsko**, če je količnik dveh zaporednih členov konstanten, kar zapišemo $\frac{a_{n+1}}{a_n} = k$. Število k je **količnik zaporedja**, pri čemer $k \neq 0$.

Če z a_1 označimo prvi člen zaporedja in s k količnik zaporedja, splošni člen izrazimo kot

$$a_n = a_1 k^{n-1}.$$

Št. točk

3

Kako izračunamo vsoto prvih n členov geometrijskega zaporedja, če poznamo prvi člen in količnik? Kako izračunamo to vsoto, če je količnik enak 1? Trditvi dokažite.

Naj bosta a_1 in k zaporedoma prvi člen in količnik geometrijskega zaporedja.

Če $k \neq 1$, vsoto prvih n členov izračunamo po formuli

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

DOKAZ. Naj bo S_n vsota prvih n členov geometrijskega zaporedja. Zapišemo lahko:

$$S_n = a_1 + a_1 k + \dots + a_1 k^{n-1}.$$

Enačbo množimo s k , dobimo

$$kS_n = a_1 k + a_1 k^2 + \dots + a_1 k^n.$$

Če zgornji enačbi odštejemo, dobimo

$$S_n(k - 1) = a_1 k^n - a_1,$$

od koder izrazimo

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

□

Če je $k = 1$, je vsota prvih n členov zaporedja enaka

$$S_n = na_1.$$

DOKAZ. Če je $k = 1$, so vsi členi geometrijskega zaporedja enaki a_1 . Vsoto n členov takega zaporedja izračunamo kot

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + \dots + a_1}_{n\text{-krat}} = na_1.$$

□

Naj bo (a_k) zaporedje s pozitivnimi členi. Dokažite, da je (a_k) geometrijsko zaporedje natanko tedaj, ko je za poljubno naravno število n geometrijska sredina členov a_n in a_{n+2} enaka a_{n+1} .

DOKAZ. Ker dokazujemo ekvivalenco, moramo trditev dokazati v obe smeri.

Najprej predpostavimo, da je (a_k) geometrijsko zaporedje. Ker so vsi členi zaporedja pozitivni, lahko geometrijsko sredino členov a_n in a_{n+2} izrazimo kot

$$\sqrt{a_n a_{n+2}} = \sqrt{a_n \cdot a_n k^2} = \sqrt{(a_n k)^2} = a_n k = a_{n+1}.$$

Ker sta a_n in a_{n+2} enako predznačena, je njun zmnožek vedno pozitiven.

Naj bo zdaj geometrijska sredina členov zaporedja a_n in a_{n+2} enaka a_{n+1} za poljubno naravno število n . Potem velja

$$\begin{aligned} \sqrt{a_n \cdot a_{n+2}} &= a_{n+1} \\ a_n a_{n+2} &= a_{n+1}^2 \\ \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} &= \frac{a_{n+1}}{a_n}, \end{aligned}$$

kar z drugimi besedami pomeni, da je količnik med dvema poljubnima zaporednima členoma tega zaporedja enak, kar pa ustreza definiciji geometrijskega zaporedja in dokaz je končan. \square

84 Geometrijska vrsta

Št. točk

3

Kaj je vrsta? Kdaj je vrsta konvergentna in kdaj divergentna? Kaj je vsota konvergentne vrste?

Vrsta je vsota členov nekega zaporedja.

Vrsta je **konvergentna**, če obstaja limita zaporedja delnih vsot $S_1, S_2, S_3 \dots S_n \dots$, ko gre n v neskončnost.

Vrsta je **divergentna**, če ni konvergentna.

Vsota konvergentne vrste je definirana kot

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Št. točk

1

Definirajte geometrijsko vrsto. Kako ugotovimo, ali je geometrijska vrsta konvergentna?

Geometrijska vrsta je vsota zaporednih členov geometrijskega zaporedja.

Geometrijska vrsta je konvergentna, kadar za količnik zaporedja velja $0 < |k| < 1$.

Št. točk

2

Kako izračunamo vsoto konvergentne geometrijske vrste, če poznamo prvi člen in količnik? Trditev dokažite.

Neskončna geometrijska vrsta je konvergentna natanko tedaj, ko je $-1 < k < 1, k \neq 0$. Njena vsota je tedaj enaka $S = \frac{a_1}{1-k}$, kjer je a_1 prvi člen, k pa količnik zaporedja.

Pri dokazu izhajamo iz definicije vsote konvergentne vrste:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} = \frac{a_1 \cdot (-1)}{k - 1} = \frac{a_1}{1 - k},$$

pri čemer smo upoštevali, da če je $-1 < k < 1$, velja $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$. Hkrati pa tudi $k \neq 0$, saj sicer vrsta sploh ni geometrijska.

85 Obrestni račun

Št. točk

2

Opišite osnovne pojme obrestno obrestnega računa: glavnica, obresti, obrestovalni faktor, kapitalizacijsko obdobje.

Glavnica (oznaka: G) je denarni znesek, ki ga na banko položimo (vloga) ali si ga od banke izposodimo (dolg).

Obrestna mera (oznaka: p) je odstotni delež, na podlagi katerega nam banka pripisuje obresti.

Obresti (oznaka: o) so denarni znesek, ki nam ga banka na podlagi obrestne mere pripiše ob koncu vsake obrestovalne dobe.

Kapitalizacijsko obdobje je časovni interval, ob koncu katerega nam banka vsakič pripiše obresti. Število kapitalizacijskih obdobji označimo z n .

Št. točk

2

Opišite primer varčevanja na banki, ki uporablja obrestno obrestovanje z letnim pripisom obresti. Kako izračunamo višino privarčevanega zneska?

Naj bo n število kapitalizacijskih obdobji (let) p letna obrestna mera in G glavnica, ki jo položimo na račun na začetku. Višino privarčevanega zneska pri obrestnem obrestovanju z letnim pripisom obresti izračunamo kot

$$G_n = G \cdot r^n = G \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Št. točk

2

Opišite primer obročnega odplačevanja posojila na banki, ki uporablja obrestno obrestovanje z letnim pripisom obresti. Kako izračunamo višino obroka?

Naj bo n število kapitalizacijskih obdobji (let), naj bo G glavnica, ki si jo izposodimo na začetku, r obrestovalni faktor in a anuiteta (višina obroka). Potem moramo do konca n -tega kapitalizacijskega obdobja banki vrniti Gr^n denarja. V skladu z načelom ekvivalence glavnice lahko denarne zneske primerjamo le, če jih preračunamo na isti časovni trenutek. V skladu s tem dejstvom primerjamo vsoto vrednosti anuitet po n kapitalizacijskih obdobjih:

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1},$$

pri čemer upoštevamo formulo za vsoto geometrijskega zaporedja. Dobljeni izraz enačimo z Gr^n in izrazimo anuiteto.

$$Gr^n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$
$$a = \frac{Gr^n(r - 1)}{r^n - 1}$$

86 Odvod

Št. točk

2

Definirajte odvod funkcije v dani točki in opišite njegov geometrijski pomen.

Odvod funkcije f v točki x_0 je limita diferenčnega količnika, ko gre h proti 0.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$f'(x_0)$ je smerni koeficient tangente na graf funkcije f v $x = x_0$.

Št. točk

2

Podajte primer funkcije in točke, v kateri je funkcija odvedljiva, in po definiciji odvoda izračunajte njen odvod v izbrani točki.

Po definiciji izračunajmo odvod funkcije f s predpisom $f(x) = x^2$ v točki $x = 2$.

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4$$

Št. točk

1

Naj bo funkcija f odvedljiva v točki x_0 . Kako izračunamo enačbo tangente na graf funkcije f v točki x_0 .

Naj bo odvod funkcije f v točki x_0 enak $f'(x_0)$. Enačbo tangente na graf funkcije f v točki x_0 določimo tako, da najprej izračunamo vrednost $f(x_0)$, da dobimo točko $T(x_0, f(x_0))$, skozi katero poteka tangenta na graf. S pomočjo koordinat te točke in smernega koeficienta tangente, ki je enak vrednosti odvoda funkcije v tej točki, $k = f'(x_0)$, lahko enačbo tangente na graf v točki x_0 določimo kot

$$\begin{aligned}y - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\y &= f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0).\end{aligned}$$

Št. točk

1

Naj bo funkcija f odvedljiva v točki x_0 in naj bo $f'(x_0) \neq 0$. Kako izračunamo enačbo normale na graf funkcije f v točki x_0 ?

Naj bo vrednost odvoda funkcije f v točki $T(x_0, f(x_0))$ enaka $f'(x_0)$. Potem je smerni koeficient normale na graf funkcije f v dani točki enak $-\frac{1}{f'(x_0)}$. Nato lahko enačbo normale na graf v točki x_0 določimo kot

$$\begin{aligned}y - f(x_0) &= -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \\y &= -\frac{x}{f'(x_0)} + f(x_0) + \frac{x_0}{f'(x_0)}.\end{aligned}$$

87 Lokalni ekstremi

Št. točk

2

Definirajte lokalni maksimum in lokalni minimum funkcije.

Funkcijska vrednost $f(x_0)$ je **lokalni minimum** funkcije, če obstaja taka okolica $\sigma_\epsilon(x_0)$, da za vsak $x \in \sigma_\epsilon(x_0)$ velja $f(x) \geq f(x_0)$.

Funkcijska vrednost $f(x_0)$ je **lokalni maksimum** funkcije, če obstaja taka okolica $\sigma_\epsilon(x_0)$, da za vsak $x \in \sigma_\epsilon(x_0)$ velja $f(x) \leq f(x_0)$.

Št. točk

2

Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija. Kako s pomočjo prvega odvoda ugotovimo, ali ima funkcija f v točki x_0 lokalni ekstrem?

Vemo, da tam, kjer je odvod negativen, funkcija pada, kjer je pozitiven, pa narašča. Funkcija ima v točki x_0 torej lokalni minimum, če je levo od x_0 odvod negativen, desno pa pozitiven, in lokalni maksimum, če je levo od x_0 odvod pozitiven, desno pa negativen.

Z drugimi besedami, funkcija ima v stacionarni točki x_0 ekstrem, če v tej točki odvod spremeni predznak.

Št. točk

2

Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrat odvedljiva funkcija in x_0 njena stacionarna točka. Kako s pomočjo drugega odvoda ugotovimo, ali ima funkcija f v točki x_0 lokalni ekstrem?

Če v stacionarni točki x_0 za drugi odvod funkcije velja $f''(x_0) > 0$, je stacionarna točka lokalni minimum.

Če v stacionarni točki x_0 za drugi odvod funkcije velja $f''(x_0) < 0$, je stacionarna točka lokalni maksimum.

88 Ekstremi

Št. točk

2

Definirajte globalni maksimum in globalni minimum funkcije.

Funkcijska vrednost $f(x_0)$ je **globalni maksimum** funkcije f na množici $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_f$, če za vsak $x \in \mathcal{A}$ velja: $f(x) \leq f(x_0)$. Rečemo, da je globalni maksimum $f(x_0)$ dosežen pri x_0 .

Funkcijska vrednost $f(x_0)$ je **globalni minimum** funkcije f na množici $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_f$, če za vsak $x \in \mathcal{A}$ velja: $f(x) \geq f(x_0)$. Rečemo, da je globalni minimum $f(x_0)$ dosežen pri x_0 .

Št. točk

2

Opišite postopek za iskanje globalnih ekstremov odvedljive funkcije, definirane na zaprtem intervalu.

Globalne ekstreme na intervalu $[a, b]$ poiščemo teko, da določimo stacionarne točke, in sicer nas zanimajo le tiste, ki so na intervalu $[a, b]$. V teh stacionarnih točkah ter v krajiščih intervala (torej v a in b) izračunamo funkcijske vrednosti. Največja od teh funkcijskih vrednosti je globalni maksimum, najmanjša pa globalni minimum funkcije na tem zaprtem intervalu.

Št. točk

1

Povejte primer funkcije, katere globalni minimum je enak njenemu globalnemu maksimumu.

Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = 0$ ima na intervalu $(-\infty, \infty)$ globalni maksimum enak 0 in globalni minimum enak 0. Torej je globalni maksimum funkcije enak njenemu globalnemu minimumu, in sicer 0.

Št. točk

1

Povejte primer omejene funkcije, ki nima globalnega maksimuma.

Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = \arctan x$ je omejena, saj ima zgornjo mejo $M = \frac{\pi}{2}$ in spodnjo mejo $m = -\frac{\pi}{2}$, hkrati pa na intervalu $(-\infty, \infty)$ nima globalnega maksimuma.

89 Odvod

Št. točk

2

Naj graf odvedljive funkcije f seka abscisno os v točki $T(x_0, 0)$. Povejte definicijo kota α med grafom funkcije f in abscisno osjo v točki T . Kako izračunamo kot α , če poznamo $f'(x_0)$?

Kot α med grafom funkcije f in abscisno osjo v točki T je kot med tangento na graf funkcije v točki T in pozitivnim poltrakom abscisne osi.

Če je $f'(x_0) > 0$, graf funkcije oklepa oster kot s pozitivnim poltrakom abscisne osi, izračunamo pa ga kot

$$\alpha = \arctan f'(x_0).$$

Če je $f'(x_0) < 0$, pa graf funkcije oklepa s pozitivnim poltrakom abscisne osi topi kot. V tem primeru kot izračunamo kot

$$\alpha = \arctan f'(x_0) + \pi.$$

Št. točk

2

Naj se grafa odvedljivih funkcij f in g sekata v točki $T(x_0, y_0)$. Povejte definicijo kota φ med grafoma funkcij f in g v točki T . Kako izračunamo kot φ , če poznamo $f'(x_0)$ in $g'(x_0)$? Kdaj sta grafa pravokotna?

Kot φ med grafoma f in g je kot med tangentama na grafa teh funkcij v njunem presečišču T . Kot izračunamo po obrazcu:

$$\varphi = \arctan \left| \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)} \right|.$$

Grafa funkcij f in g sta v točki x_0 pravokotna, če velja $f'(x_0) = -\frac{1}{g'(x_0)}$.

Št. točk

2

Povejte primer odvedljive funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, katere graf seka abscisno os v točki $T(1, 0)$ pod kotom 45° .

Primer take funkcije je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = x - 1$.

90 Nedoločeni integral

Št. točk

2

Definirajte nedoločeni integral funkcije.

Nedoločeni integral funkcije f je množica vseh primitivnih funkcij funkcije f .

Primitivna funkcija funkcije f je taka funkcija F , da velja $F'(x) = f(x)$ oziroma $dF = f(x) dx$.

Nedoločeni integral funkcije f je torej

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

pri čemer je $C \in \mathbb{R}$.

Št. točk

2

Povejte pravili za integriranje vsote funkcij in za integriranje produkta funkcije s konstanto.

Integral vsote funkcij je enak vsoti integralov funkcij:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Integral produkta funkcije s konstanto je enak produktu konstante z integralom funkcije:

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx, \text{ za } k \in \mathbb{R}.$$

Št. točk

2

Na primeru opišite metodo uvedbe nove integracijske spremenljivke pri računanju nedoločenega integrala.

Z metodo uvedbe nove spremenljivke bomo izračunali nedoločeni integral $\int (x^3 + 1)^5 x^2 dx$.

Uvedemo spremenljivko $u = x^3 + 1$ tako, da iz sestavljene funkcije naredimo osnovno potenčno funkcijo u^5 , katere nedoločeni integral poznamo. Zamenjati pa moramo tudi diferencial spremenljivke x z diferencialom nove spremenljivke u , saj integriramo po spremenljivki u . Slednjo enakost diferenciramo in dobimo $du = 3x^2 dx$. Sledi

$$\int (x^3 + 1)^5 x^2 dx = \frac{1}{3} \int u^5 du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^6}{6} + C = \frac{(x^3 + 1)^6}{18} + C.$$

91 Nedoločeni integral

Naj bodo a, b, k in r poljubna realna števila.

Št. točk

2

Izračunajte $\int x^r dx$ (tako za $r \neq -1$ kot za $r = -1$).

Če $r \neq -1$, velja

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C.$$

V primeru $r = -1$ velja

$$\int x^{-1} dx = \ln |x| + C.$$

Št. točk

1

Izračunajte $\int a^x dx$.

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Št. točk

1

Povejte formulo za integracijo z metodo integracije po delih (per partes).

Formula za integracijo z metodo integracije per partes je

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx.$$

Slednje lahko zapišemo tudi z diferenciali kot

$$\int u(x) \cdot dv = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) du.$$

Št. točk

2

Metodo integracije po delih razložite na primeru.

Z metodo integracije per partes izračunajmo $\int x \sin x dx$. Uvedemo $u(x) = x$ in $v'(x) = \sin x$. Sledi $u'(x) = 1$ in $v(x) = -\cos x$. Od tod imamo

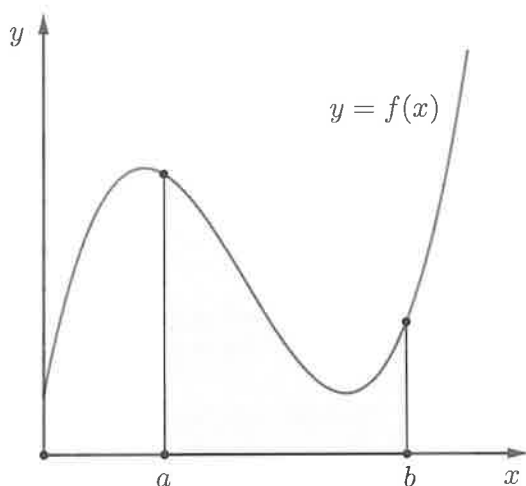
$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

92 Določeni integral

Št. točk

2

Skicirajte lik, ki ga na intervalu $[a, b]$ omejujejo graf zvezne pozitivne funkcije f , abscisna os ter premici $x = a$ in $x = b$. Kako izračunamo ploščino tega krivočrtnega lika?



Ploščino tega krivočrtnega lika izračunamo kot določeni integral funkcije f v mejah od a do b :

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Št. točk

2

Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liha zvezna funkcija in a pozitivno realno število. Koliko je $\int_{-a}^a f(x) dx$? Utemeljite odgovor.

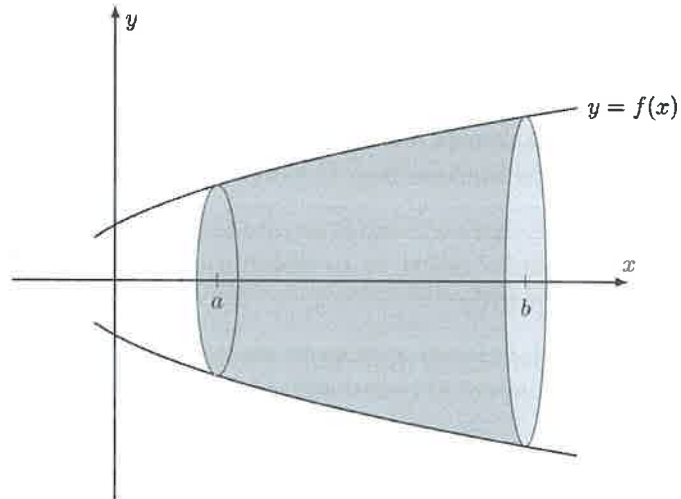
Graf lihe funkcije je simetričen glede na koordinatno izhodišče. Zato sta absolutni vrednosti določenih integralov na pozitivnem in negativnem delu osi x enaki, nedoločena integrala pa sta zaradi lihosti nasprotno predznačena, zato je njuna vsota enaka 0.

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

Št. točk

2

Krivočrtni lik, ki ga z abscisno osjo na intervalu $[a, b]$, določa graf zvezne pozitivne funkcije f , zavrtimo okoli abscisne osi za 360° . Narišite skico. Povejte formulo za prostornino nastalega rotacijskega telesa.



Formula za prostornino nastalega rotacijskega telesa je

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

93 Določeni integral

Št. točk

1

Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Pojasnite geometrijski pomen določenega integrala funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Absolutna vrednost določenega integrala zvezne funkcije f na intervalu $[a, b]$ je enaka ploščini lika, omejenega s krivuljo $y = f(x)$ in abscisno osjo na intervalu $[a, b]$.

Št. točk

2

Povejte zvezo med določenim in nedoločenim integralom (Newton-Leibnizeva formula). Navedite primer.

Naj bo f definirana in zvezna na intervalu $[a, b]$ in naj bo $F(x)$ njena primitivna funkcija. Potem je

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Št. točk

3

Na primeru razložite metodo uvedbe nove spremenljivke pri računanju določenega integrala.

Izračunajmo določeni integral funkcije $f(x) = \sin(6x)$ v mejah od 0 do π z uvedbo nove spremenljivke.

Uvedemo novo spremenljivko $u = 6x$, sledi $du = 6 dx$. Pri tem se v skladu z uvedeno spremenljivko meje integracije spremenijo: spodnja meja je enaka $6 \cdot 0 = 0$, zgornja pa $6 \cdot \pi = 6\pi$. Dobimo

$$\int_0^\pi \sin(6x) dx = \frac{1}{6} \int_0^{6\pi} \sin u du = -\frac{1}{6} \cos u \Big|_0^{6\pi} = -\frac{1}{6} (\cos 6\pi - \cos 0) = 0.$$

94 Kombinatorika

Št. točk

1

Povejte osnovni izrek kombinatorike.

Naj nek proces izbiranje poteka v k fazah, pri čemer imamo v 1. fazi n_1 možnosti, v 2. fazi n_2 možnosti ... in v k -ti fazi n_k možnosti izbire. Pri tem je izbor v vsaki fazi neodvisen od izborov v vseh prejšnjih fazah. Potem je vseh možnih izborov v tem procesu

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k.$$

Št. točk

1

Uporabo osnovnega izreka kombinatorike razložite na primeru.

Saša ima na voljo 5 različnih enodelnih uhanov, 4 bluže različnih barv in 3 vrste hlač. Če se požvižga na barvne kombinacije, si lahko uhan, bluzo in hlače nadene na

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ načinov.}$$

Št. točk

1

Povejte pravilo vsote.

Denimo, da imamo pri nekem izbiranju na voljo n_1 elementov prve množice, n_2 elementov druge množice ... n_k elementov k -te množice, pri čemer so izbori elementov teh množic nezdržljivi. Potem je možnih izborov pri tem zbiranju:

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_k.$$

Št. točk

1

Uporabo pravila vsote razložite na primeru.

Domen se prehranjuje nadvse nezdravo. Na večerjo se vsak dan odpravi ali v bližnjo pekarno ali v burgerijo ali v picerijo. V pekarni izbira med 3 različnimi vrstami burekov, v burgeriji izbira med 4 različnimi vrstami burgerjev, v piceriji pa izbira med 6 različnimi picami. Večerjo si lahko zrežira na

$$3 + 4 + 6 = 13 \text{ načinov.}$$

Št. točk

1

Povejte pravilo vključitev in izključitev za dve množici ter ga razložite na primeru.

Moč unije dveh množic izračunamo tako, da od vsote moči unij posameznih množic odštejemo moč preseka teh množic.

$$|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|$$

V oddelku 4. a neke menda elitne gimnazije 15 dijakov obiskuje matematični krožek in 20 dijakov obiskuje fizikalni krožek. 9 dijakov obiskuje oba krožka. Vsak dijak obiskuje vsaj en krožek. Iz načela vključitev in izključitev za dve množici ugotovimo, da je v razredu $20 + 15 - 9 = 26$ dijakov.

Št. točk

1

Povejte pravilo vključitev in izključitev za tri množice.

Moč unije treh množic izračunamo tako, da od vsote moči posameznih množic odštejemo moči presekov posameznih parov množic in prištejemo moč preseka vseh treh množic.

$$|\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| - |\mathcal{B} \cap \mathcal{C}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{C}| + |\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}|$$

95 Permutacije

Št. točk

1

Koliko je vseh bijektivnih funkcij iz končne množice \mathcal{A} nase?

Naj bo n moč množice \mathcal{A} . Potem je število vseh bijektivnih preslikav iz množice \mathcal{A} samo nase enako

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

Št. točk

1

Povejte primer končne množice \mathcal{A} in bijektivne funkcije iz \mathcal{A} v \mathcal{A} .

Naj bo $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$. Funkcija $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ s predpisom $f(x) = x$ je bijektivna.

Št. točk

1

Kaj so permutacije brez ponavljanja in koliko jih je?

O **permutacijah brez ponavljanja** govorimo, kadar želimo vse elemente neke množice razvrstiti v eno vrsto. Pri tem vsak element uporabimo natanko enkrat in razlikujemo med vsemi temi elementi.

Permutacij brez ponavljanja je $P_n = n!$.

Št. točk

1

Povejte primer permutacije brez ponavljanja.

Pet dijakov je pri matematičnem testu prepisovalo. Novopečeni profesor Jakob Jurij jim po pravilniku ne sme dodeliti nezadostne ocene, zato sklene, da bo naslednji teden, ko imajo na urniku 5 ur matematike, vsako uro ustno ocenil enega od dijakov, pri čemer bo vsakega dijaka ocenil natanko enkrat. Profesor Jakob Jurij lahko v koledarček v redovalnici dijake za ustno ocenjevanje vpiše na

$$P_5 = 5! = 120 \text{ načinov.}$$

Št. točk

1

Kaj so permutacije s ponavljanjem in koliko jih je?

O **permutacijah s ponavljanjem** govorimo, kadar želimo vse elemente neke množice razvrstiti v vrsto, pri tem pa med nekaterimi elementi te množice ne ločimo oziroma jih smatramo za enake.

Permutacij s ponavljanjem je

$$P_n^{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!},$$

pri čemer je $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$.

Št. točk

1

Povejte primer permutacije s ponavljanjem.

Juš ima 15 po obliki enakih plišastih koz, od tega 4 modre, 5 rdečih in 6 zelenih. V vrsto jih lahko postavi na

$$\frac{15!}{4! \cdot 5! \cdot 6!} \text{ načinov.}$$

96 Variacije

Št. točk

2

Naj ima množica \mathcal{A} moč r , naj ima množica \mathcal{B} moč n in naj bo $r < n$. Koliko je vseh injektivnih funkcij iz množice \mathcal{A} v množico \mathcal{B} ?

Injektivnih preslikav iz množice \mathcal{A} v množico \mathcal{B} je

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

Št. točk

2

Naj bosta \mathcal{A} in \mathcal{B} končni množici. Koliko je vseh funkcij iz množice \mathcal{A} v množico \mathcal{B} ?

Naj bo r moč množice \mathcal{A} in n moč množice \mathcal{B} . Vseh funkcij iz množice \mathcal{A} v množico \mathcal{B} je

$$n^r.$$

Št. točk

1

Kaj so variacije brez ponavljanja in koliko jih je?

Pri **variacijah brez ponavljanja** lahko na r prostih mest razporedimo le r od n različnih elementov.

Število variacij brez ponavljanja je

$$V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Št. točk

1

Kaj so variacije s ponavljanjem in koliko jih je?

Pri **variacijah s ponavljanjem** lahko na vsako izmed r prostih mest razporedimo katerakoli izmed n elementov

Število variacij s ponavljanjem je

$${}^{(p)}V_n^r = n^r.$$

97 Kombinacije

Št. točk

1

Kaj je binomski simbol in kako izračunamo njegovo vrednost?

Imejmo množico \mathcal{A} z n elementi. Število podmnožic množice \mathcal{A} z močjo r označimo z $\binom{n}{r}$. Ta simbol imenujemo **binomski simbol**. Njegovo vrednost izračunamo po formuli

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

pri čemer je $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

Št. točk

3

Opišite vsaj tri lastnosti računanja z binomskimi simboli.

Za nenegativni celi števili n in r , $n \geq r$, velja:

$\binom{n}{0} = 1$	podmnožica z močjo 0 je ena sama, to je prazna množica,
$\binom{n}{1} = n$	število podmnožic z enim elementom je n ,
$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$	simetričnost ,
$\binom{n}{n} = 1$	n elementov ima ena podmnožica,
$\binom{n}{n-1} = n$	število podmnožic z $n-1$ elementi je n ,
$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$	aditivnost .

Št. točk

1

Kaj so kombinacije brez ponavljanja in koliko jih je?

Kombinacija brez ponavljanja reda k iz n elementov dane končne množice z močjo n je podmnožica z močjo k .

O kombinacijah brez ponavljanja govorimo v primerih ko izbore razlikujemo le po tem, katere elemente vsebujejo, vrstni red elementov v izboru pa ni pomemben.

Kombinacij brez ponavljanje je

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Št. točk

1

Za nenegativni celi števili n in r , kjer je $r \leq n$, opišite zvezo med številoma V_n^r in C_n^r .

Število vseh variacij brez ponavljanja reda r iz n elementov je ravno tolikšno, kot je število kombinacij brez ponavljanja reda r iz n elementov, pomnoženih s številom permutacij elementov v posamezni kombinaciji, to je $r!$.

$$V_n^r = C_n^r \cdot r!$$

98 Binomski izrek

Št. točk

1

Povejte binomski izrek.

Naj bo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ in $a, b \in \mathbb{R}$. Potem lahko izraz $(a + b)^n$ razvijemo kot

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n.$$

Št. točk

2

Moč množice \mathcal{A} je n . Koliko je moč potenčne množice množice \mathcal{A} ? Dokažite.

Naj bo \mathcal{A} množica z n elementi. Potem ima njena potenčna množica moč 2^n .

DOKAZ. Izrek bomo dokazali na dva načina. Imejmo množico z n elementi. Potenčna množica je množica vseh podmnožic dane množice.

Način 1. Pri izbiranju različnih podmnožic preidemo vse elemente in se pri vsakem odločimo, ali ga v množico vključimo ali ne. Za to imamo 2 možnosti. To pomeni, da je skupno podmnožic enako

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n\text{-krat}} = 2^n.$$

□

Način 2. V množici z n elementi je $\binom{n}{0} = 1$ podmnožica z 0 elementi, $\binom{n}{1} = n$ podmnožic z 1 elementom, $\binom{n}{2}$ podmnožic z 2 elementoma ... $\binom{n}{n-1} = n$ podmnožic z $n - 1$ elementi in $\binom{n}{n} = 1$ podmnožica z n elementi. Po binomskem izreku velja:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1 + 1)^n = 2^n.$$

□

Št. točk

1

Opišite povezavo med binomskim izrekom in Pascalovim trikotnikom.

Na spodnjih slikah je del Pascalovega trikotnika.

$n = 0$				1						
$n = 1$				1	1					
$n = 2$				1	2	1				
$n = 3$				1	3	3	1			
$n = 4$				1	4	6	4	1		
$n = 5$				1	5	10	10	5	1	
$n = 6$				1	6	15	20	15	6	1

Koeficienti v $(n + 1)$ -ti vrstici Pascalovega trikotnika so enaki koeficientom v razvoju dvočlenika $(a + b)^n$.

99 Verjetnostni račun

Pojasnite osnovne pojme verjetnostnega računa:

Št. točk

2

Poskus in dogodek (slučajni dogodki, nemogoči in gotovi dogodki, elementarni dogodki, sestavljeni dogodki).

Poskus je opazovanje, merjenje ali izvajanje nekega pojava.

Dogodek je pojav, ki se ob neki ponovitvi poskusa zgodi ali pa tudi ne.

Gotov dogodek (oznaka: G) je dogodek, ki se zgodi v vsaki ponovitvi poskusa.

Nemogoč dogodek (oznaka: N) je dogodek, ki se ne zgodi v nobeni ponovitvi poskusa.

Slučajni dogodek (oznaka: $A, B, C \dots$) je dogodek, ki se v nekaterih ponovitvah poskusa zgodi, v drugih pa spet ne.

Elementarni dogodki nekega poskusa so vsi tisti dogodki pri tem poskusu, ki jih ne moremo zapisati kot vsoto dveh ali več različnih nezdružljivih dogodkov.

Iz elementarnih dogodkov z operatorji tvorimo **sestavljene dogodke**.

Št. točk

1

Vzorčni prostor.

Vsi elementarni dogodki nekega poskusa skupaj tvorijo **vzorčni prostor** tega poskusa.

Št. točk

1

Popoln sistem dogodkov poskusa.

Popoln sistem dogodkov poskusa je tak nabor mogočih dogodkov $A_1, A_2 \dots A_n$, da zanje velja $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = G$ in $A_i \cap A_j = N$ za $i \neq j$ (poljubna 2 različna dogodka sta nezdružljiva).

Št. točk

2

Povejte primer poskusa in opišite nekaj dogodkov v tem poskusu. Izrazite jih z elementarnimi dogodki vzorčnega prostora. Kateri med njimi so nemogoči, gotovi, elementarni in kateri sestavljeni dogodki?

Tilen meče igralno kocko.

Vzorčni prostor sestoji iz 6 elementarnih dogodkov: pade 1 pika (E_1), padeta 2 piki (E_2), padejo tri pike (E_3), padejo 4 pike (E_4), pade 5 pik (E_5) in pade 6 pik (E_6).

Iz elementarnih dogodkov lahko sestavljamo sestavljene dogodke.

Dogodek E_S , da pade sodo število, je sestavljen:

$$E_S = E_2 \cup E_4 \cup E_6.$$

Dogodek E_{2022} , da pade število 2022, je nemogoči dogodek.

Dogodek E_I , da pade enomestno število, je gotovi dogodek.

100 Verjetnostni račun

Št. točk

1

Definirajte vsoto in produkt dogodkov.

Vsota dogodkov A in B je dogodek $A \cup B$, ki se zgodi, ko se zgodi vsaj eden od dogodkov A in B .

Produkt dogodkov A in B je dogodek $A \cap B$, ki se zgodi, ko se zgodita dogodka A in B hkrati.

Št. točk

2

Kdaj sta dva dogodka nezdružljiva in kdaj združljiva? Kako izračunamo verjetnost vsote dveh združljivih dogodkov?

Dogodka A in B sta **nezdružljiva**, če je njun produkt nemogoč dogodek:

$$A \cap B = N.$$

Dogodka A in B sta **združljiva**, če nista nezdružljiva.

Verjetnost vsote dveh združljivih dogodkov je enaka vsoti verjetnosti dogodkov A in B , zmanjšani za verjetnost produkta dogodkov A in B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Št. točk

2

Kdaj sta dva dogodka odvisna in kdaj neodvisna? Kako izračunamo verjetnost produkta dveh odvisnih dogodkov?

Dogodka A in B sta **odvisna** dogodka, če je verjetnost enega od njiju odvisna od tega, ali se drugi zgodi ali ne.

Verjetnost produkta dveh odvisnih dogodkov A in B je produkt verjetnosti dogodka A in verjetnosti, da se zgodi dogodek B , ob pogoju, da se je zgodil dogodek A , in obratno:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Dogodka A in B sta **neodvisna**, kadar verjetnost dogodka A ne vpliva na verjetnost dogodka B in obratno. Z drugimi besedami, dogodek B je neodvisen od dogodka A , če je

$$P(B|A) = P(B).$$

Posledično velja, da je verjetnost produkta dveh neodvisnih dogodkov enaka produktu verjetnosti posameznih dogodkov

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Št. točk

1

Povejte primer dveh neodvisnih dogodkov in izračunajte verjetnost produkta teh dveh dogodkov.

Ivana meče dve igralni kocki. Naj bo A dogodek, da na prvi kocki pade šestica, in B dogodek, da na drugi kocki pade liho število. Dogodka A in B sta neodvisna, ker se šestica na prvi kocki zgodi neodvisno od izida na drugi kocki.

Verjetnost dogodka $A \cap B$, da na prvi kocki pade šestica, na drugi kocki pa liho število, je enaka:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

101 Verjetnostni račun

Št. točk

1

Kaj je relativna frekvenca danega dogodka? Definirajte empirično (statistično) verjetnost.

Denimo, da nek poskus ponovimo n -krat in pri tem štejemo, kolikokrat se v n ponovitvah zgodi nek dogodek A . To označimo z n_A . Potem je

$$f_A = \frac{n_A}{n}$$

relativna frekvenca dogodka A .

Limita f_A , ko gre $n \rightarrow \infty$, je verjetnost dogodka A .

Št. točk

1

Povejte klasično (matematično) definicijo verjetnosti.

Naj vzorčni prostor nekega poskusa sestoji iz n elementarnih dogodkov, od katerih je m takih, pri katerih se zgodi dogodek A . Če so vsi elementarni dogodki med seboj enakovredni (enako verjetni), je verjetnost dogodka A enaka

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Št. točk

1

Definirajte pogojno verjetnost.

Pogojna verjetnost (oznaka: $P(A|B)$) je verjetnost, da se zgodi dogodek A , pod pogojem, da se je zgodil neki drugi dogodek B . Velja

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Vzorčni prostor v tem primeru predstavljajo le elementarni dogodki, ki so ugodni za dogodek B .

Št. točk

2

Definirajte Bernoullijevo zaporedje neodvisnih poskusov. Kako izračunamo verjetnost, da se v n ponovitvah poskusa dani dogodek zgodi natanko k -krat?

Bernoullijevo zaporedje poskusov je tako zaporedje neodvisnih poskusov, da se v vsakem poskusu zgodi ali dogodek A ali njegov nasprotni dogodek A' .

Denimo, da nek poskus ponovimo n -krat in pri vsakem poskusu opazujemo, če se je zgodil nek dogodek A s poznano verjetnostjo $P(A) = p$.

Verjetnost $P(n, p, k)$, da se v n neodvisnih poskusih dogodek z verjetnostjo p zgodi natanko k -krat, je

$$P(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Št. točk

1

Povejte primer zaporedja neodvisnih poskusov, ki ni Bernoullijevo zaporedje neodvisnih poskusov.

Čarovnica Betka ima v pisarni čudežno košarico bonbonov. Namreč, ko gost iz košarice na slepo vzame bonbon, je verjetnost, da dobi čokoladnega, vedno enaka 0,1, verjetnost, da dobi limoninega, vedno enaka 0,3, verjetnost, da dobi jagodnega, pa vedno enaka 0,6.

Nekega nevihtnega popoldneva se pri čarovnici Betki oglasi coprnica Marta, ki iz Betkine košare zaporedoma izvleče pet bonbonov.

Zaporedje Martinih poskusov ni Bernoullijevo, ker se ob vsakem poskusu lahko zgodijo trije dogodki (izvleče čokoladen, limonin ali jagodni bonbon), pri Bernoullijevem zaporedju pa se v vsakem poskusu zgodi nek dogodek ali njegov nasprotni dogodek.

102 Statistika

Opišite osnovne statistične pojme.

Št. točk

1

Populacija in vzorec (reprezentativen, slučajen).

Populacija je končna ali neskončna množica, ki jo statistično preučujemo.

Vzorec je končna podmnožica populacije, na kateri preučujemo nek pojav. Vzorec je **reprezentativen**, če so elementi izbrani tako, da kar najboljše predstavljajo lastnosti celotne populacije.

Vzorec je **slučajen**, če elemente izberemo naključno.

Št. točk

1

Statistična enota in statistična spremenljivka (znak).

Statistična enota je posamezni element populacije.

Statistična spremenljivka ali **statistični znak** je merljiva lastnost posamezne statistične enote, ki je predmet statističnega preučevanja.

Št. točk

1

Statistični parameter.

Statistični parameter je značilnost populacije kot celote.

Št. točk

2

Razložite razliko med številkami in opisnimi statističnimi spremenljivkami ter razliko med zveznimi in diskretnimi številkami statističnimi spremenljivkami.

Številske statistične spremenljivke so podane s številkami (ocena, število doseženih točk, masa, izid glasovanja), medtem ko so **opisne statistične spremenljivke** podane opisno, neštevilsko (spol, poklic, najljubši parfum).

Številske statistične spremenljivke so lahko **diskretne**, kar pomeni, da zavzamejo le celoštevilске vrednosti, ali **zvezne**, kar pomeni, da lahko zavzamejo poljubno vrednost na nekem intervalu.

Št. točk

1

Povejte primer statistične naloge in na njem razložite osnovne statistične pojme.

Ciril bi rad preučil pogostost pregledovanja šolske elektronske pošte pri dijakih neke slovenske srednje šole, saj mu profesorji v zadnjem času poročajo o vse večji neodzivnosti dijakov. V ta namen da razdeliti anketne lističe med 100 naključno izbranih dijakov, na katerih dijaki zapišejo, kolikokrat na dan pregledajo elektronsko pošto.

V tem primeru so *populacija* dijaki te srednje šole, *vzorec* je 100 naključno izbranih dijakov (vzorec je v tem primeru slučajen), *statistična enota* je dijak/dijakinja šole, *statistična spremenljivka* je pogostost pregledovanja šolske elektronske pošte, *statistični parameter* pa odzivnost dijakov.

103 Statistika

Št. točk

3

Definirajte frekvenco, relativno frekvenco in kumulativno frekvenco statistične spremenljivke (znaka).

Frekvenca (oznaka: f) je število ponovitev posamezne vrednosti statistične spremenljivke.

Relativna frekvenca (oznaka: f^0) je delež posamezne vrednosti statistične spremenljivke glede na celoto. Velja

$$f^0 = \frac{f}{N}.$$

Kumulativna frekvenca F je število vseh vrednosti statistične spremenljivke, ki so manjše ali enake neki vrednosti.

Št. točk

3

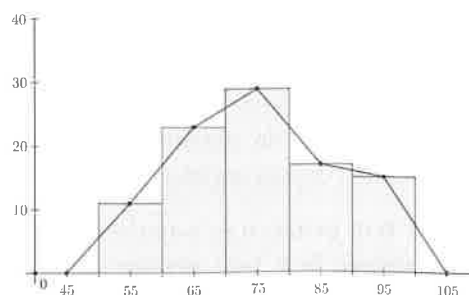
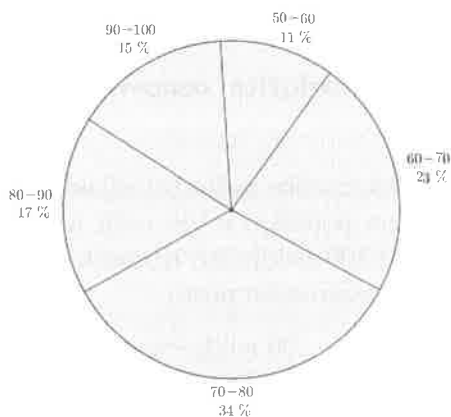
Opišite tri načine grafičnega prikazovanja podatkov.

Krožni (tortni) diagram ali **strukturni krog** je način grafičnega prikazovanja podatkov, pri katerem celota (100 %) pomeni cel krog, torej 360° . Deleže posameznih vrednosti statistične spremenljivke ali frekvenčnih razredov prikažemo s krožnimi izseki, katerih središčni koti so sorazmerni z relativnimi frekvencaми posameznih vrednosti ali frekvenčnih razredov.

Stolpični diagram je prikaz podatkov, pri katerem z višino stolpca predstavimo frekvenco nekega podatka ali frekvenčnega razreda. Ločimo ležeči in pokončni stolpični diagram.

Histogram uporabimo, ko imamo urejene podatke ali pa tudi grupirane. Višine stolpcev histograma predstavljajo frekvence posameznih podatkov ali frekvenčnih razredov. Širina stolpca pa predstavlja bodisi širino frekvenčnega razreda bodisi je širina prilagojena tako, da je podatek, ki ga stolpec predstavlja, na sredini širine stolpca.

Frekvenčni poligon dobimo tako, da sredine vrhov stolpcev histograma povežemo z lomljeno črto. Pri tem pa dodamo še dva stolpca. Ta pripadata prvemu in zadnjemu podatku ali frekvenčnemu razredu s frekvenco 0, zato imata ta dva stolpca višino 0. To pomeni, da se frekvenčni poligon vedno začne in konča na osi x .



104 Statistika

Št. točk

1

Definirajte aritmetično sredino (povprečje) podatkov.

Naj bodo $x_1, x_2 \dots x_n$ številski podatki, ki se v danem nizu pojavljajo s frekvencami $f_1, f_2 \dots f_n$. Potem je njihova **aritmetična sredina** enaka

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

Aritmetična sredina pove, kakšno vrednost bi zavzela spremenljivka na vsaki enoti, če bi vsoto vseh vrednosti razdelili enakomerno na vse enote populacije.

Št. točk

1

Definirajte modus podatkov. Kako ga določimo?

Modus ali **gostiščnica** (oznaka: M_o) je podatek, ki je v naboru podatkov najpogostejši. Če imajo v naboru podatkov vsi podatki enako frekvenco, potem ta nabor nima modusa. Modusov je lahko tudi več.

Št. točk

1

Kdaj je porazdelitev podatkov bimodalna?

Porazdelitev je **bimodalna**, če ima dva modusa. To pomeni, da se dve vrednosti v naboru pojavita enako pogosto.

Št. točk

1

Definirajte mediano podatkov. Kako jo izračunamo v odvisnosti od števila podatkov?

Mediana ali **središčnica** (oznaka: Me) je podatek, ki leži natančno na sredini po velikosti urejenih podatkov.

Če je število podatkov nabora liho, je mediana srednji podatek.

Če je število podatkov nabora sodo, je mediana aritmetična sredina dveh osrednjih vrednosti.

Št. točk

1

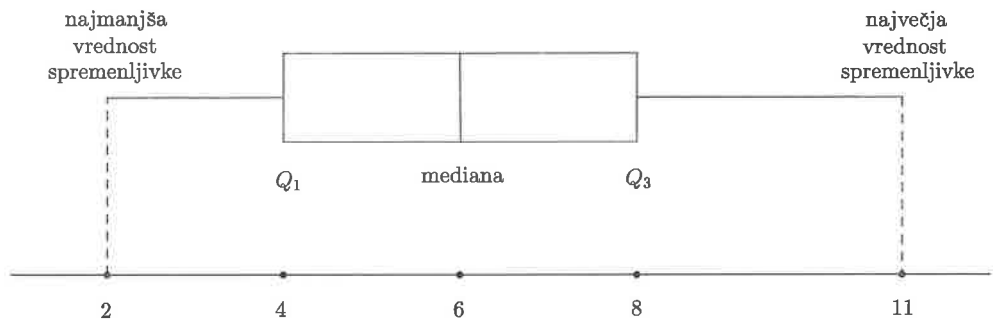
Definirajte kvartile.

Mediana nam podatke razdeli na dva dela. Za vsako od teh dveh polovic (pri tem ne štejemo podatka/podatkov, ki smo ga/ju vključili v izračun mediane) lahko ponovno izračunamo mediano. Pri tem nastanejo kvartili:

- **prvi kvartil** (oznaka: Q_1) je mediana prve polovice podatkov,
- **drugi kvartil** (oznaka: Q_2) je mediana vseh podatkov,
- **tretji kvartil** (oznaka: Q_3) je mediana druge polovice podatkov.

Kako narišemo škatlo z brki?

Škatlo z brki narišemo tako, da najprej podane številske podatke prikažemo na številski premici. Danim podatkom določimo najmanjšo vrednost, največjo vrednost, mediano $Me = Q_2$, prvi kvartil (Q_1) in tretji kvartil (Q_3) in jih s točkami prikažemo na številski premici. Nad številsko premico narišemo pravokotnik z dolžino $Q_3 - Q_1$. Narišemo daljico od Q_1 do najmanjše vrednosti in daljico od Q_3 do največje vrednosti.



105 Statistika

Opišite mere razpršenosti in jih prikažite na primeru.

Imejmo množico podatkov $\{1, 1, 2, 4, 5, 5, 7\}$.

Št. točk

1

Variacijski razmik.

Variacijski razmik (oznaka: R) je razlika med največjim in najmanjšim podatkom v danem nizu podatkov:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Variacijski razmik je v našem primeru $R = 7 - 1 = 6$.

Št. točk

1

Medčetrtnski razmik.

Medčetrtnski razmik ali **interkvartilni rang** (oznaka: IR) je razlika med tretjim in prvim kvartilom v danem nizu podatkov:

$$IR = Q_3 - Q_1.$$

Določimo mediano $Me = 4$ ter prvi kvartil $Q_1 = 1$ in tretji kvartil $Q_3 = 5$. Medčetrtnski razmik v našem primeru je $IR = 5 - 1 = 4$.

Št. točk

2

Standardni odklon.

Standardni odklon (oznaka: σ) je eden izmed parametrov, ki povedo, za koliko v povprečju vrednosti statistične spremenljivke odstopajo od povprečne vrednosti. Izračunamo ga kot kvadratni koren povprečja kvadratov odklikov od povprečne vrednosti:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}.$$

Povprečje podatkov v množici je $\bar{x} = \frac{1+1+2+4+5+5+7}{7} = \frac{25}{7}$. Vrednost standardnega odklona v našem primeru je

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{7} \left(\left(1 - \frac{25}{7}\right)^2 + \left(1 - \frac{25}{7}\right)^2 + \left(2 - \frac{25}{7}\right)^2 + \left(4 - \frac{25}{7}\right)^2 + \left(5 - \frac{25}{7}\right)^2 + \left(5 - \frac{25}{7}\right)^2 + \left(7 - \frac{25}{7}\right)^2 \right)}$$

$$\sigma \doteq 2,3$$

Opišite značilnosti normalne (Gaussove) porazdelitve statističnih podatkov.

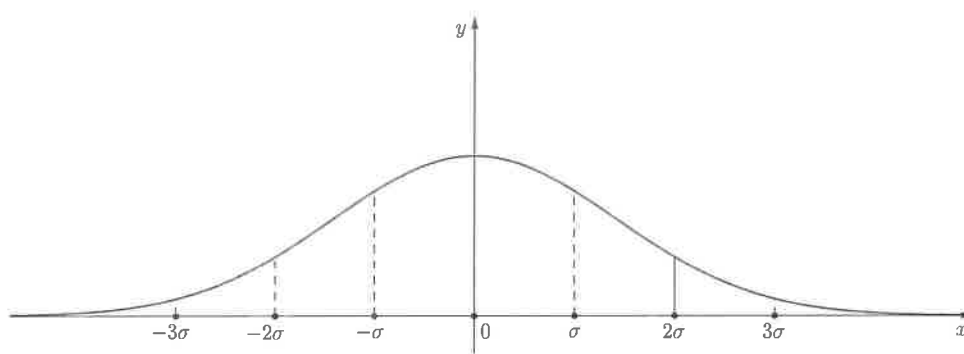
Normalna porazdelitev (tudi Gaussova porazdelitev) je verjetnostna porazdelitev vrednosti statističnih enot v statistični populaciji, ki je v grafični predstavitvi oblikovana v obliki normalne krivulje.

Standardna normalna porazdelitev je porazdelitev vrednosti s povprečjem (aritmetično sredino) \bar{x} in standardnim odklonom σ .

Verjetnost, da se podatek nahaja na intervalu $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$, je približno 68,27 %.

Verjetnost, da se podatek nahaja na intervalu $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$, je približno 95,45 %.

Verjetnost, da se podatek nahaja na intervalu $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$, je približno 99,73 %.

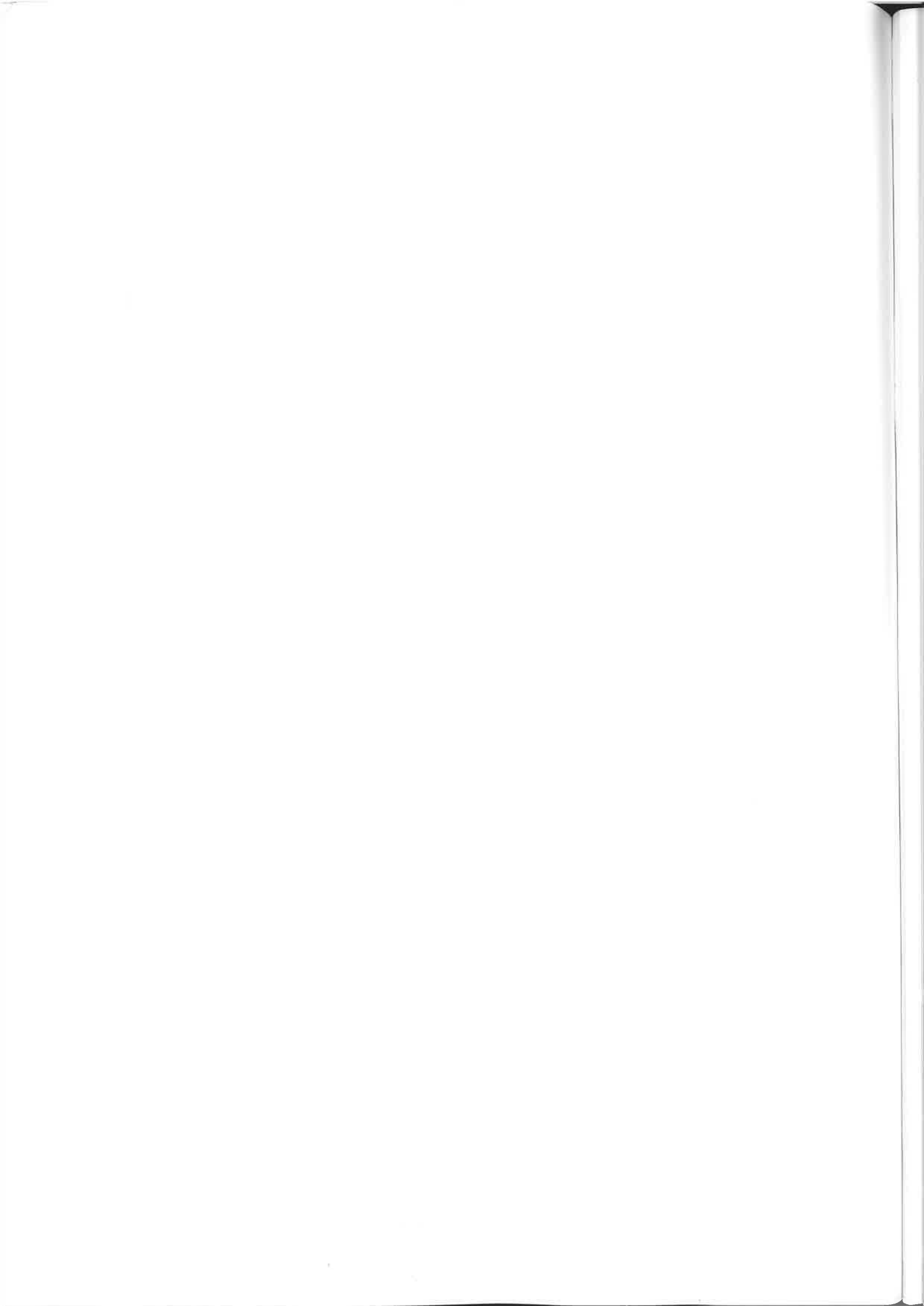


Literatura

- [1] Dvoržak, B. 2022 MATEMATIKA NA SPLOŠNI MATURI: Vprašanja in odgovori za ustni izpit iz matematike na splošni maturi za osnovno raven. Ljubljana: Intelego, 2022.
- [2] Bon Klanjšček, M. 2011. Zbirka odgovorov na ustna vprašanja iz maturitetnega kataloga za matematiko. Nova Gorica: Bomi, 2011.

Pri pisanju sem si pomagal tudi z zapiski, ki sem jih napravil pri pouku matematike pri nekdanjem profesorju matematike Tilnu Šetini.





knjižnica

51:37

KAVČIČ, V.

Matematika /2022

51:37:091:27:373



046604

COBISS

II. GIMNAZIJA HORJENBOR

CENA: 14,70 €

